Секция «Математика и механика»

О единственности решений нелинейных параболических уравнений для мер

Манита Оксана Анатольевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: oxana.manita@gmail.com

Уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка вида

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j}\left(a^{ij}\mu_t\right) - \partial_{x^i}\left(b^i \mu_t\right)$$

на пространстве конечных мер на $\mathbb{R}^d$ представляют большой интерес для многих областей математики (см. книгу [1] и ссылки в ней). Например, эти уравнения соответствуют обратным уравнениям Колмогорова для классических диффузионных процессов. Ряд моделей статистической физики также приводит к нелинейным уравнениям такого вида, например, к кинетическим уравнениям Власова (см. [2]). При этом вопрос единственности решений уравнений общего вида рассматривается довольно редко (см. [4]). Особый интерес вызывают уравнения с вырождающейся матрицей главной части.

В докладе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j}\left(a^{ij}(x,t)\mu_t\right) - \partial_{x^i}\left(b^i(x,t,\mu)\mu_t\right), \quad \mu\Big|_{t=0} = \mu_0. \tag{1}$$

Вопросы существования решений подобных уравнений (даже в более общем случае, когда матрица диффузии также зависит от решения) были изучены в [3].

Как и в классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, непрерывность коэффициентов не гарантирует единственность вероятностного решения данной задачи Коши. Действительно, рассмотрим в $\mathbb{R}^1$ задачу (1) с $a \equiv 0$ и $b(x) = x^{2/3}$. Тогда задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = b(x)$, $x(0) = 0$ имеет два решения: $x_1(t) = t^3/3$ и $x_2(t) = 0$. Поэтому меры $\delta_{x_1(t)}$ и $\delta_{x_2(t)}$ являются различными решениями соответствующей задачи Коши (1). В нелинейном случае ситуация еще более сложная. Рассмотрим следующий пример, в котором коэффициенты вообще не зависят от x. Пусть $d = 1$, $a \equiv 0$ и

$$b(x,t,\mu) = G\biggl(\int |y|^2 \, d\mu_t\biggr).$$

Пусть также функция $x(t)$ есть решение задачи Коши $\dot{x} = G(x^2)$, $x(0) = 0$. Поэтому мера $\mu = (\mu_t)$, где $\mu_t = \delta_{x(t)}$, есть решение задачи Коши (1). Очевидно, что для $G(u) = u^{1/3}$ мы получим, как и выше, два различных решения $\delta_{x_1(t)}$ и $\delta_{x_2(t)}$.

В докладе будут рассмотрены уравнения с вырождающейся главной частью и неограниченными коэффициентами, для которых выполнены условия теоремы существования из [3]. Будет показано, как с помощью аппроксимативного метода Гольмгрена получить достаточные условия единственности вероятностных решений (1). Отметим, что эти условия оказываются более слабыми, чем условия Липшица по переменным x и μ.

Данная работа поддержана грантом РФФИ 12-01-33009 мол_а_вед.

Литература

1. Богачев В.И., Крылов Н.В., Рекнер М., Шапошников С.В. Уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. М.-Ижевск, 2013.
2. Добрушин Р.Л. Уравнения Власова // Функц. анал. и его прил., 1979, т. 13, 2, стр. 48–58.
3. Манита О.А., Шапошников С.В. Нелинейные параболические уравнения для мер // Алгебра и Анализ, 2013, Т. 25, 1, стр. 64–93.
4. Funaki T. A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1984, v. 67, P. 331-348.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. проф. Богачеву В.И. и Шапошникову С.В. за плодотворные обсуждения и ценные замечания.