О граничной задаче Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерной области

Нефедов Павел Владимирович
Аспирант
Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: paul.nefedov@cs.msu.su

Настоящая работа является продолжением работ Е.И.Моисеева и П.В.Нефедова по исследованию разрешимости задачи для уравнений смешанного типа в трехмерных областях.
Основной целью работы является исследование существования регулярного (классического) решения задачи Лаврентьева-Бицадзе для краевой задачи Геллерстедта в случае трехмерной области специального вида.
В трехмерной области D рассматривается следующее уравнение Лаврентьева-Бицадзе [1]:

$$L[u] = u_{xx} + sign(y) \cdot u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{1}$$

где функция $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$, где трехмерная область D представима как $D = D^{(+)} \cup D^{(-)}$:

$$D^{(+)} = \left\{(x, y, z) : \; D^{(+)}_{xy} \times (0 < z < \pi)\right\},$$

$$D^{(-)} = \left\{(x, y, z) : \; \{D^{(-1)}_{xy} \cup D^{(-2)}_{xy}\} \times (0 < z < \pi)\right\},$$

где двумерные (в плоскости переменной $z = 0$) области $D^{(+)}_{xy}$, $D^{(-1)}_{xy}$ и $D^{(-2)}_{xy}$ определены соответственно как:

$$D^{(+)}_{xy} = \left\{(x, y) : \; -1 < x < 1, \; x^2 + y^2 < 1, \; y > 0\right\},$$

$$D^{(-1)}_{xy} = \{(x, y) : \; -1 < x < 0, \; y < 0, -x - 1 < y < x\},$$

$$D^{(-2)}_{xy} = \{(x, y) : \; 0 < x < 1, \; y < 0, \; -x < y < x - 1\}.$$

Обозначим как Γ следующую поверхность:

$$\Gamma = \{(x, y, z) : \; (y < 0, \, -1 \le x \le 1, \, y = \pm x, \, y = \pm x - 1) \times (0 \le z \le \pi)\}.$$

Сформулируем далее краевую задачу, которая изучается в настоящей работе.

В трехмерной области D требуется найти регулярное (т.е. классическое) решение дифференциального уравнения (1), принадлежащее функциональному классу

$$u \in C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-)})$$

и удовлетворяющее на границе области D дополнительным краевым условиям:

$$u(x,y,z)|_{x=\cos\varphi, y=\sin\varphi} = \psi(\varphi,z),\ 0 \le \varphi,\ z \le \pi, \tag{2}$$

$$u(x,y,z) = 0,\ \ (x,y,z) \in \Gamma, \tag{3}$$

$$u(x,y,z)|_{z=0} = u(x,y,z)|_{z=\pi} = 0,\ (x,y) \in D_{xy}^{(+)} \cup D_{xy}^{(-1)} \cup D_{xy}^{(-2)}. \tag{4}$$

Дополнительно накладываются следующие ограничения на граничную функцию $\psi = \psi(\varphi,z)$ (далее по тексту “A”-условия):
(A1) $\psi = \psi(\varphi,z) \in C_{\varphi}^{2,\alpha}$ (условие гельдеровости функции $\psi = \psi(\varphi,z)$ по переменной φ);
(A2) $\psi_{z^4}^{(4)} \in C^{\alpha},\ \psi_{z^4}^{(4)} \in C^4$;
(A3) $\psi(\varphi,0) = \psi(\varphi,\pi) = 0$ (условие периодичности по переменной z).

Была доказана следующая теорема.
Теорема. Решение $u = u(x,y,z)$ поставленной задачи (1)-(4), построенное в виде $u(x,y,z) = U(x,y,z) + V(x,y,z)$, является регулярным (классическим) решением (при выполнения условий “A”) поставленной задачи Геллерстедта в трехмерной области D, причем справедливы следующие представления (см. также [2]):

$$U(x,y,z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin kz \sum_{n=0}^{\infty} A_{nk} \cos\left((2n+1/2)(\pi/2-\varphi)\right) \frac{I_{2n+1/2}(kr)}{I_{2n+1/2}(k)}, \\ (x,y,z)|_{x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi} \in D^{(+)}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sin kz \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} A_{nk} \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{2n+1/2}{2}} \frac{I_{2n+1/2}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{2n+1/2}(k)}, \\ (x,y,z) \in D^{(-)}. \end{cases}$$

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \sum_{n,k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \sin\left((n-1/4)(\varphi-\pi)\right) \frac{I_{n-1/4}(kr)}{I_{n-1/4}(k)}, \\ (x,y,z)|_{x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi} \in D^{(+)}; \\ \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n-1/4}{2}} \frac{I_{n-1/4}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{n-1/4}(k)}, \\ (x,y,z) \in D^{(-)}. \end{cases}$$

Слова благодарности

Автор выражает благодарность академику РАН Моисееву Е.И. за научное руководство и постановку задачи.
Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7332.2010.9) и поддержки молодых ученых-кандидатов наук (проект МК-7128.2012.9), фонда РФФИ (проекты 11-01-12081-офи-м-2011, 11-01-00164-а) и при частичной финансовой поддержке федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России".

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа // Изд-во "Наука", 1970, 295 стр.

2. Моисеев Е.И., Прудников А.П., Седлецкий А.М. Базисность и полнота некоторых систем элементарных функций // Вычислительный центр РАН, 2004, 146 стр.