Секция «Математика и механика»

Точное решение задачи об изгибе шарнирно опёртой прямоугольной пластины под действием пьезоэлектрика

Степаненко Иван Игоревич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: mr.stepanenko.ivan@gmail.com

Применение пьезоэлектрических материалов в качестве датчиков и актюаторов для управления формой и колебаниями плоских конструкций находит всё большее распространение. Этому посвящено огромное количество публикаций, как в России(например, [1-2]), так и за рубежом. Среди всего многообразия работ следует выделить работы, основанные на применении классической теории тонких пластин [4-6].

Рассматривается прямоугольная пластина с внедрённым пьезоэлементом (рис. 1), состоящая из идеально соединённых между собой ортотропных слоев. Пьезоэлемент может быть как внедрён между слоями, так и присоединён к поверхности пластины. Пластина занимает область пространства $x \in [0, L], y \in [0, W], z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Пьезоэлемент занимает область пространства $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2], z \in [z_-^P, z_+^P]$, его центр имеет координаты $(x_P, y_P, z_P) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_-^P+z_+^P}{2})$, имеет размеры $(L_P, W_P, h_P) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_+^P - z_-^P)$. Ось поляризации пьезоэлемента параллельна оси z.

Определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL} - e_{3IJ}E_3$$
$$D_3 = e_{3IJ}\varepsilon_{IJ} + \xi_3 E_3,\ \ I, J, K, L \in \overline{1,2},$$

где ε — тензор деформаций, σ — тензор напряжений, C — тензор модулей упругости, e — тензор пьезоэлектрических констант, E — вектор электрического напряжения, D — вектор электрического смещения, ξ — вектор диэлектрической проницаемости. $e = 0$ для материала пластины и отличен от нуля для пьезоматериала.

В [4] при использовании гипотез Кирхгофа-Лява и при пренебрежении изменением жёсткости в месте внедрения пьезоматериала получены уравнения равновесия такой пластины при воздействии электричества на пьезоэлемент. В случае, когда оси ортотропии слоёв материала совпадают с осями координат, и в случае симметрии слоёв относительно центральной плоскости уравнения равновесия разделяются на уравнения относительно горизонтальных перемещений u, v и на уравнение относительно прогиба w. Последнее уравнение носит имя Софи-Жермен и имеет вид:

$$D_{1111}w_{,xxxx} + 2(D_{1122} + 2D_{1212})w_{,xxyy} + D_{2222}w_{,yyyy} = -Vz_P[R_{,xx}e_{311} + 2R_{,xy}e_{312} + R_{,yy}e_{322}] \tag{1}$$

, где $D_{IJKL} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} z^2 C_{IJKL}\, dz$ — тензор изгибных жесткостей, $V = \frac{E_3}{h_P}$ — электрическое напряжение на пьезоэлементе, $R(x, y) = (H(x - x_1) - H(x - x_2))(H(y - y_1) - H(y - y_2))$ — функция положения пьезоэлемента в плане, $H(x)$ - функция Хевисайда.

Воздействие пьезоэлектрика на пластину отражает специфическая правая часть уравнения (1), выражающаяся через обобщённые функции — функцию Хевисайда $H(x)$, дельта-функцию Дирака $\delta(x)$ и её производную $\delta'(x)$.

В работе на основе решения Навье [3] получено точное решение уравнения (1) при граничных условиях, соответствующих шарнирному закреплению:

$$w|_{x=0,L} = w|_{y=0,W} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0,L} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0,W} = 0$$

Решение имеет вид двойного тригонометрического ряда:

$$w(x,y) = \frac{16 V z_P L W e_{311}}{\pi^4 D_{1111}} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{w}_{ij} \sin(i\frac{\pi}{L}x)\sin(j\frac{\pi}{W}y),$$

$$\tilde{w}_{ij} = \frac{\sin(i\frac{\pi}{L}\frac{L_P}{2})\sin(j\frac{\pi}{W}\frac{W_P}{2})\left[\left(\frac{iW}{jL}+\frac{e_{322}jL}{e_{311}iW}\right)\sin(i\frac{\pi}{L}x_P)\sin(j\frac{\pi}{W}y_P) - 2\frac{e_{312}}{e_{311}}\cos(i\frac{\pi}{L}x_P)\cos(j\frac{\pi}{W}y_P)\right]}{(\frac{i^2W}{L})^2 + \frac{2(D_{1122}+2D_{1212})}{D_{1111}}(ij)^2 + \frac{D_{2222}}{D_{1111}}(\frac{j^2L}{W})^2} \tag{2}$$

Скорость сходимости двойного ряда (2) не хуже скорости сходимости двойного ряда с общим членом $\frac{1}{ij(i^2+j^2)}$.

Полученная формула может применяться как для непосредственного анализа, так и для оценки точности численных схем, решающих более сложные задачи.

Работа выполнена под руководством проф. Победри Б. Е.

Литература

1. Гетман И. П., Устинов Ю. А. К теории неоднородных электроупругих плит // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 5. С. 923-932

2. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988.

3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.:Наука, 1966.

4. Bor-Tsuen Wang, Craig A. Rogers Laminate Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain actuators // Journal of Composite Materials April 1991 vol. 25 no. 4 433-452

5. H. S. Tzou, H. Q. Fu A study of segmentation of distributed piezoelectric sensors and actuators part I: theoretical analysis // J. Sound Vib., 172, 247-259 (1994).

6. H. S. Tzou, H. Q. Fu A study of segmentation of distributed piezoelectric sensors and actuators part II: parametric study and active vibration controls // J. Sound Vib., 172, 261-275 (1994).

Слова благодарности

Автор благодарит Чернова В. М. и проф. Победрю Б. Е. за помощь в подготовке работы.

Иллюстрации

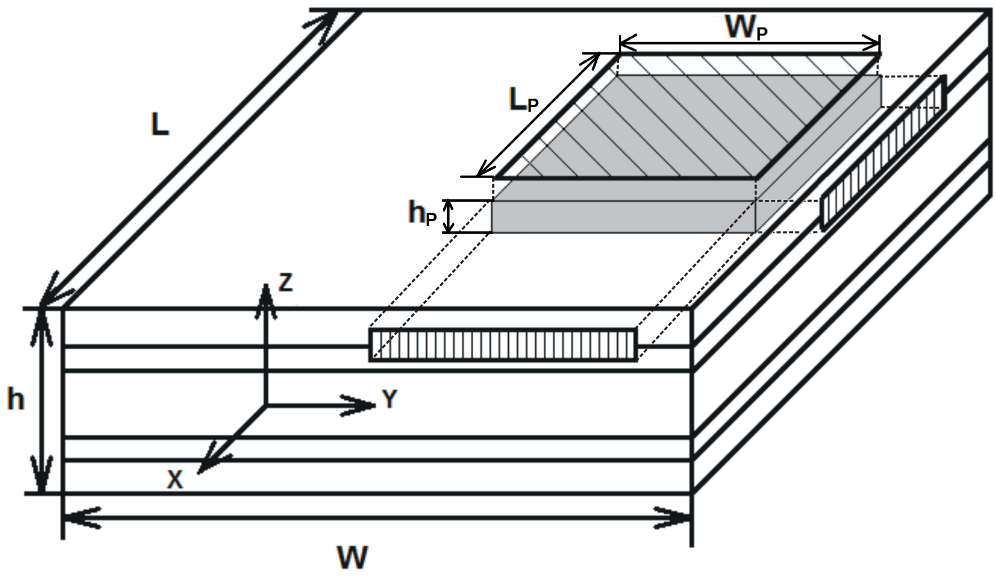

Рис. 1: Схема слоистой пластины с внедрённым пьезоэлементом