Секция «Математика и механика»

О некоторых достаточных условиях равномерности систем функций многозначной логики

Тарасов Павел Борисович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: tarasov.p.b@gmail.com

В работе рассматривается задача о реализации функций k-значной логики из замкнутых классов формулами в конечных базисах, состоящих из функций, принадлежащих этим же классам. Все необходимые определения можно найти в работах [6,8,4]

Обозначим через $P_{k,2}$ все функции k-значной логики, принимающие значения 0 и 1, $k \geq 2$. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, Φ - формула над A. Обозначим через $L(\Phi)$ число символов переменных и констант, входящих в формулу Φ (сложность формулы Φ), а через $D(\Phi)$ — глубину формулы Φ. Пусть $f \in [A]$. Положим $D_A(f) = \min l(\Phi)$, $L_A(f) = \min L(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Φ над A, реализующим f. Конечную систему функций A будем называть равномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$D_A(f) \leq c \log L_A(f) + d.$$

В работах [7,10] доказана равномерность любой конечной полной системы булевых функций (см. также [5]). Позднее, в работе [11] была доказана равномерность всех конечных систем булевых функций, порождающих класс M. В работах [3,4] доказана равномерность всех конечных систем булевых функций. Аналогичный результат получен в работе [9]. Равномерность конечных систем, порождающих некоторые предполные классы в P_k установлена в работах [1,2], $k \geq 3$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $P_{k,2}$, а $g(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из P_2, такие что для любого $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f и обозначать через prf. Пусть A — конечная система функций $P_{k,2}$. Положим $pr(A) = \bigcup_{f \in A} pr(f)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, такая, что множество* $\mathrm{pr}A$ *не содержится целиком ни в одном из классов $O^\infty, I^\infty, D, K, L$. Тогда система A равномерна.*

Литература

1. Сафин Р. Ф. О глубине и сложности формул в некоторых классах k- значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. 1. С. 65-68.

2. Сафин Р.Ф. О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k-значной логики // Математические вопросы кибернети- ки. М. Физматлит. 2004. С. 223–278.

3. Угольников А. Б. О соотношении между глубиной и сложностью фор- мул для замкнутых классов двузначной логики //IV Всесоюзная конференция "Применение методов математической логики": тезисы докладов. Таллин. 1986. С. 184.

4. Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики. Математические заметки, том 42, выпуск 4, октябрь 1987. М.: Наука, 1987. С. 603-612.

5. Храпченко В.М. О соотношении между сложностью и глубиной формул / / Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып. 32. Но- восибирск, ИМ СО АН СССР. 1978. 76-94 .

6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа 2001. 384с

7. Яблонский С.В., Козырев В.П. Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы / М.: Научный совет по комплексной проблеме Кибернетика АН СССР. 1978, Вып 32 С. 76-94.

8. Lau D, Function Algebras on Finite Sets. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

9. Ragaz M. E. Parallelizable algebras. Archiv fur mathematische Logik und Grundlagenforschung 26 (1986/7). P. 77-99

10. Spira P. M. On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences, North Hollywood, 1971, Western Periodicals Company, P. 525-527.

11. Wegener I. Relating Monotone Formula Size and Monotone Depth of Boolean Functions // Information Processing Letters, 16. 1983. P. 41-42.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность А. Б. Угольникову за постановку задачи и обсуждение результатов работы.