Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Полукруговой закон для случайных матриц с зависимыми элементами

Наумов Алексей Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: naumov_ne@inbox.ru

Рассмотрим треугольный массив случайных величин $X_{ij}, 1 \leq i \leq j < \infty$, таких что $\mathbb{E}X_{ij} = 0$, $\mathbb{E}X_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2$, и пусть $X_{ji} = X_{ij}$. Сформируем случайную матрицу $\mathbb{X}_n = \{X_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Обозначим через $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ собственные значения матрицы $n^{-1/2}\mathbb{X}_n$ и определим эмпирическую функцию распределения

$$\mathcal{F}^{\mathbb{X}_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(\lambda_i \leq x),$$

где через $I(B)$ мы обозначили индикатор события B. Положим $F^{\mathbb{X}} = \mathbb{E}\mathcal{F}^{\mathbb{X}}$. Обозначим плотность и функцию распределения полукругового закона через

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}I[-2,2], \quad G(x) = \int_{-\infty}^x g(y)dy.$$

В работе [1] Вигнер рассмотрел матрицы $\mathbb{X}_n$, элементы которых независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, и показал, что $F^{\mathbb{X}_n}$ сходится к полукруговому закону $G(x)$. Позже этот результат был обобщен в ряде работ, но большинство авторов предполагали, что все σ_{ij} одинаковые. В работе [2] Ф. Гётце, А. Наумов и А. Тихомиров получили обобщение полукругового закона Вигнера для симметричных матриц с зависимыми элементами. Отметим, что все σ_{ij} могут быть различными числами, которые удовлетворяют некоторым условиям. Для формулировки результата нам потребуется ввести условия на матрицу $\mathbb{X}_n$.

Определим набор σ-алгебр $\mathcal{F}^{(i,j)} = \sigma\{X_{lk}, (l,k) \neq (i,j)\}, 1 \leq i \leq j \leq n$. Для всех $\tau > 0$ определим отношение Линдеберга для случайных матриц с помощью

$$L_n(\tau) := \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}X_{ij}^2 I(|X_{ij}| \geq \tau\sqrt{n}).$$

Будем считать, что для матрицы $\mathbb{X}_n$ выполнены следующие условия

$$\mathbb{E}(X_{ij}|\mathcal{F}^{(i,j)}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}|\mathbb{E}(X_{ij}^2|\mathcal{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{2}$$

$$\text{для всех } \tau > 0 \quad L_n(\tau) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{3}$$

Для всех $1 \le i \le n$ положим $B_i^2 := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2$. Наложим условия на поведение дисперсий σ_{ij}^2:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |B_i^2 - 1| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{4}$$

$$\max_{1 \le i \le n} B_i \le C. \tag{5}$$

Следующая теорема представляет собой основной результат работы [2].
Теорема 1. Пусть случайная матрица $\mathbb{X}_n$ удовлетворяет условиям (1)-(5). Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^{\mathbb{X}_n}(x) - G(x)| \to 0 \text{ при } n \to 0. \tag{6}$$

Для доказательства Теоремы 1 нужно доказать аналог принципа универсальности Линдеберга для случайных матриц, который заключается в том, что мы можем заменить произвольную матрицу $\mathbb{X}_n$ на матрицу с независимыми гауссовскими элементами. На втором шаге требуется показать сходимость (6) для матриц с независимыми гауссовскими элементами. Детали см. в работе [2].

Литература

1. Wigner E.P. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices // Ann. of Math., 1958. No. 67. P. 325-327.

2. Goetze F., Naumov A., Tikhomirov A. Semicircle law for a class of random matrices with dependent entries: www.arxiv.org/abs/1211.0389