

Секция «Математика и механика»

Аналитическое решение задачи о растяжении естественно закрученного стержня в рамках моментной теории упругости

Попов Алексей Константинович

Аспирант

Таганрогский государственный педагогический институт, Физико-математический факультет, Таганрог, Россия

E-mail: ASDAlexey@yandex.ru

Рассмотрена задача об упругом равновесии естественно закрученного стержня под действием растягивающих концевых усилий в рамках моментной теории упругости. Стержень подвержен осевому растяжению. Решение в перемещениях поставленной задачи найдено в виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 + \\ + \tau_0 & \left(D_{11}x^1 + D_{12}x^2 + D_{13}x^3 + B_{11}(x^1)^2 + B_{12}x^1x^2 + B_{13}x^1x^3 + B_{22}(x^2)^2 + B_{23}x^2x^3 + B_{33}(x^3)^2 \right) \quad (1) \\ u_2 &= A_{21} \cdot x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 + \tau_0 (C_{11}(x^1)^2 + C_{12}x^1 \cdot x^2 + D_{21} \cdot x^1 + D_{22}x^2 + D_{23}x^3 + \\ & + C_{13}x^1x^3 + C_{22}(x^2)^2 + C_{23}x^2x^3 + C_{33}(x^3)^2) \\ u_3 &= A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3 + \tau_0 \left(p\varphi(x^1, x^2) + E_{13}x^1x^3 + E_{23}x^2x^3 + E_{33}(x^3)^2 \right) \end{aligned}$$

Задача об упругом равновесии стержня при указанных условиях сводится к определению постоянных и функций, входящих в вектор перемещений, нахождению компонент вектора перемещений (1), тензора силовых и моментных напряжений, удовлетворяющих в области, занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия, граничным условиям на основаниях и боковой поверхности стержня. В рамках работы независимые постоянные определены из дифференциальных уравнений равновесия моментной теории упругости в результате их разложения в ряд по степеням параметра τ_0 (степень крутки), граничных условий на основаниях стержня, представимых в виде интегральных соотношений и граничных условий боковой поверхности стержня, представимых в виде дифференциальных соотношений. В результате получены формулы компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= p & \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \left(\tau_0 p_1 \frac{\partial \varphi(x^1, x^2)}{\partial x^1} + \left(\frac{p((3 \lambda + 2 \mu) \Gamma - I_p \lambda)}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S} + \frac{\lambda p}{\mu(3 \lambda + 2 \mu)} \right) x^2 \tau_0 \right) \mu \quad (2) \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \left(\tau_0 p \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial x^2} - \left(\frac{p((3 \lambda + 2 \mu) \Gamma - I_p \lambda)}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S} + \frac{\lambda p_1}{\mu(3 \lambda + 2 \mu)} \right) x^1 \tau_0 \right) \mu \end{aligned}$$

Указаны выражения для компонент тензора моментных напряжений и среднее значение кручения τ для всего поперечного сечения:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= p \nu \tau_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^1} + \frac{((3 \lambda + 2 \mu) \Gamma - I_p \lambda)}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S} \right) \\ \mu_{22} &= p \nu \tau_0 \left(\frac{((3 \lambda + 2 \mu) \Gamma - I_p \lambda)}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^1} \right) & \mu_{12} &= \mu_{21} = -\frac{\tau_0 p}{2} \left((\nu + \beta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^1)^2} - (\nu - \beta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^2)^2} \right) \quad (3) \\ \mu_{13} &= \mu_{31} = \nu p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} - \frac{((3 \lambda + 2 \mu) \Gamma - I_p \lambda)}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S} x^2 \right) \tau_0^2 & \mu_{33} &= \frac{2p(\lambda I_p - (3 \lambda + 2 \mu) \Gamma) \nu \tau_0}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S} \\ \mu_{23} &= \mu_{32} = \nu p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{((3 \lambda + 2 \mu) \Gamma - I_p \lambda)}{(3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S} x^1 \right) \tau_0^2 \\ \tau &= \frac{1}{S} \int_S \kappa_{x_3 x_3} dS = \frac{p(\lambda I_p - (3 \lambda + 2 \mu) \Gamma) \tau_0}{S((3 \lambda + 2 \mu) \mu I_p + 2(3 \lambda + 2 \mu) \nu S)} \end{aligned}$$

Полученные формулы (2), (3) отличаются от результатов статьи Риза П.М. [1] тем, что:

1. Деформация поперечного сечения стержня определяется не только компонентами силовых напряжений σ_{13} , σ_{31} , σ_{23} , σ_{32} , но и компонентами моментных напряжений.
2. Компоненты u_1 и u_2 вектора перемещений зависят не только от величины растягивающих усилий p , но и от геометрии стержня.
3. Среднее значение кручения τ для всего поперечного сечения зависит не только от полярного момента и величины T , но и от площади поперечного сечения S .

Литература

1. Риз П.М. Деформация естественно закрученных стержней. — Доклады АН СССР, 1939, т.3, 4, с.451.