Секция «Математика и механика»

Асимптотики эргодических и циклических (C, B, A)-перестановок Арнольда.

Байгушев Данила Александрович

Школьник

Лицей «Вторая школа», , Москва, Россия

E-mail: IDanila24@gmail.com

В 1958 г. на своем московском семинаре В.И. Арнольдом была поставлена следующая задача (см. [1]). Рассмотрим последовательность $\{1, 2, \ldots, n\}$. Разобьем ее на три блока $\{A, B, C\}$ (состоящих из последовательных чисел) и переставим их в порядке $\{C, B, A\}$. Получившуюся перестановку мы будем называть (C, B, A)*-перестановкой* (или *перестановкой Арнольда*).

Целью данной работы является изучение следующих вопросов, поставленных В. И. Арнольдом: *каковы доли эргодических (т.е. состоящих из одного цикла) и циклических (т.е. состоящих из циклов одинаковой длины)* (C, B, A)*-перестановок?*

Теорема 1. *Перестановка Арнольда, задаваемая блоками размеров a, b и c соответственно, состоит в точности из $h =$НОД$(a + b, b + c)$ независимых циклов.*

Используя теорему Арнольда [2] о равномерной распределенности, получаем

Следствие 2. *Доля перестановок Арнольда длины n, состоящих из h независимых циклов, стремится к $\frac{1}{\zeta(2)} \cdot \frac{1}{h^2}$ при $n \to \infty$ и фиксированном h.*

В частности, при $h = 1$ получается, что доля $\delta(n)$ эргодических перестановок Арнольда стремится к константе $\frac{1}{\zeta(2)} \approx 0{,}608$.

Теперь рассмотрим вопрос о доле $z(n)$ циклических перестановок Арнольда. Ясно, что $z(n) \geqslant \delta(n) \to \frac{1}{\zeta(2)}$.

Заметим, что перестановка Арнольда является циклической тогда и только тогда, когда $h \mid n$. Поэтому, если $n = p$ — простое, то $z(n) = \delta(n)$. С другой стороны, если n составное, то доля циклических перестановок может быть гораздо больше доли эргодических перестановок.

Для того, чтобы «сгладить» эти различия, мы рассмотрим *среднее по Чезаро* последовательности $z(n)$. А именно, положим $\widehat{z}(n) := \frac{z(1)+z(2)+\ldots+z(n)}{n}$. В следующей таблице приведены вычисления средних долей $\widehat{z}(n)$ при некоторых n.

n	10	10^2	10^3	10^4
$\widehat{z}(n)$	0,531944	0,683165	0,725496	0,730691
$\zeta(3)/\zeta(2)$	0,730765	0,730765	0,730765	0,730765
погрешность	$\approx 10^{-1}$	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-4}$

Таким образом, имеет место следующая

Гипотеза 3. *Средняя доля $\widehat{z}(n)$ стремится к константе $\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}$.*

Литература

1. Арнольд В.И. Что такое математика. М.: МЦНМО, 2008 г.

2. Арнольд В.И. Равномерное распределение неделимых векторов в целочисленном пространстве. Изв. РАН. Сер. матем. 79:1 (2009), с. 21–29.