## Секция «Математика и механика»

### Структура коммутативного моноида на множестве функций Белого регулярных тривалентных торических рисунков.

***Голубев Константин Викторович***
*Аспирант*
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*
*E-mail: kgolubev@gmail.com*

Рисунком $D$ называется компактная, связная, гладкая ориентированная поверхность $S$ вместе с таким графом $\Gamma$ на ней, что его дополнение $S \setminus \Gamma$ гомеоморфно дизъюнктному объединению открытых дисков. Регулярным называется рисунок, для любых двух вершин которого существует автоморфизм, переводящий одну в другую. Тривалентным называется рисунок, все вершины которого имеют валентность три. Регулярные тривалентные торические рисунки — это регулярные замощения тора шестиугольниками. Перечисляются они следующим образом.

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Обозначим через $\rho$ корень шестой степени из единицы $\rho = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$. Отметим, что $\rho^2 = \rho - 1$. Рассмотрим шестиугольник на $\mathbb{C}$ с вершинами в $\{\rho^k\}_{k=0}^5$, обозначим плоскость $\mathbb{C}$, замощенную при помощи параллельных переносов указанного шестиугольника, через $\mathbb{C}_6$.

Для пары целых чисел $(m, n) \neq (0, 0)$ рассмотрим целочисленную решетку $L_{m+n\rho}$ в $\mathbb{C}_6$, порожденную числами $m + n \cdot \rho$ и $\rho \cdot (m + n \cdot \rho) = -n + (m + n)\rho$, тогда фактор $\mathbb{C}_6/L_{b+c\rho}$ представляет из себя тор, с вложенной в него шестиугольной сеткой. Обозначим полученный рисунок через $D_{m+n\rho}$. Множество $\{D_{m+n\rho}\}$ и составляет искомое семейство регулярных тривалентных торических рисунков.

Рисунок $D_{m+n\rho}$ является графом Кэли своей группы автоморфизмов $\Gamma_{m+n\rho}$ ([2]), имеющей копредставление:

$$\Gamma_{m,n} = \left\langle T_1, T_2, T_3 \,|\, T_i^2 = E, i = 1, 2, 3;\ (T_2T_3)^m(T_2T_1)^n = (T_2T_3)^n(T_1T_2)^{m+n} = E \right\rangle$$

Порядок группы $\Gamma_{m+n\rho}$ и, соответственно, количество вершин рисунка равны $2(m^2 + mn + n^2)$.

В силу того, что для любой пары $(m, n)$ решетка $L_{m+n\rho}$ — шестиугольная, соответсвующий тор можно параметризовать уравнением $y^2 = x^3 - 1$. Соответствующую рисунку $D_{m+n\rho}$ функцию Белого обозначим $\beta_{m+n\rho}$. Она является рациональной функцией от $z = x^3$, поэтому мы будем писать $\beta_{m+n\rho}(z) = \beta_{m+n\rho}(x^3)$. Сформулируем теорему.

**Теорема.** Пусть

$$m + n\rho = (m_1 + n_1\rho) \cdot (m_2 + n_2\rho) \neq 0,$$

тогда

$$\beta_{m+n\rho}(z) = \beta_{m_1+n_1\rho}(\beta_{m_2+n_2\rho}(z)) = \beta_{m_2+n_2\rho}(\beta_{m_1+n_1\rho}(z)).$$

Теорема позволяет ввести структуру коммутативного моноида на множестве функций Белого регулярных тривалентных торических рисунков относительно операции композиции. В качестве единицы выступает фукнция $\beta_{1+0\rho}(z) = z$.

**Пример.** Положим $m_1 + n_1 = 1 + \rho$ и $m_2 + n_2 = 2$, тогда ([1])

$$\beta_{1+\rho}(z) = -\frac{(z-4)^3}{27z^2} \text{ и } \beta_2(z) = \frac{z(z+8)^3}{64(z-1)^3};$$

$m + n\rho = (1+\rho)\cdot 2 = 2 + 2\rho$ и

$$\beta_{2+2\rho}(z) = \beta_{1+\rho}(\beta_2(z)) = \beta_2(\beta_{1+\rho}(z)) =$$

$$= -\frac{(z-4)^3(z^3 - 228z^2 + 48z - 64)^3}{1728z^2(z-1)^3(z+8)^6}.$$

## Литература

1. Н.М. Адрианов, Н.Я. Амбург, В.А. Дремов, Ю.Ю. Кочетков, Е.М. Крейнес, Ю.А. Левицкая, В.Ф. Насретдинова, Г.Б. Шабат, Каталог функций Белого детских рисунков с не более чем четырьмя ребрами, Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, No 6, с. 1–78.

2. Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М., 1980.

## Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Г.Б. Шабату за ценные указания и постоянное внимание, а также участникам семинара "Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями" за дружественную атмосферу и полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержки гранта РФФИ 10-01-00709-а.