Секция «Математика и механика»

Нахождение первой моментной функции решения уравнения диффузии со случайными коэффициентами

Сумера Светлана Сергеевна
Кандидат наук
Воронежский государственный университет, Факультет прикладной математики, Воронеж, Россия
E-mail: sumeras@yandex.ru

Рассматривается начальная задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка со случайными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_3^2} + \varepsilon_2(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_1} + \varepsilon_3(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_2} +$$

$$+\varepsilon_4(t)u(t,x) + f(t,x), \quad u(t_0,x) = u_0(x). \tag{1}$$

Здесь $t \in T = [t_0, t] \subset \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, u – искомая функция, $\varepsilon_j(t) > 0$, $j = \overline{1,4}$, f – случайные процессы, u_0 – случайное поле, независимое с ε_j и f. Пусть $F_x[f(x,y)](\xi)$ обозначает преобразование Фурье по переменному x, аналогичное обозначение используется для обратного преобразования Фурье, $\overset{x}{*}$ – обозначает свертку по переменному x [1], ε_j и f заданы характеристическим функционалом [2], т.е. известно

$$\psi(v_j(\cdot), w(\cdot)) = M(\exp(i\int\limits_T \sum_{j=1}^{4} \varepsilon_j(s)v_j(s)ds + i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(s,\tau)w(s,\tau)dsd\tau)), \tag{2}$$

M – знак математического ожидания по функции распределения процессов ε_j, $j = \overline{1,4}$ и f, $s \in T$, $\tau \in \mathbb{R}^3$, $v_j(\cdot) \in L_1(T)$, $j = \overline{1,4}$, $w(\cdot) \in L_1(T \times \mathbb{R}^3)$ – элементы пространства суммируемых на отрезке T функций. Пусть $\chi(t_0,t,s) = sign(s - t_0)$ при s лежащем в отрезке с концами t_0, t и $\chi(t_0,t,s) = 0$ в противном случае, $\dfrac{\delta f(x)}{\delta x(t)}$ - вариационная производная [2].

Теорема. *Обобщенное математическое ожидание $M(u(t,x))$ решения задачи (1), (2) находится по формуле*

$$Mu(t,x) = \frac{1}{4\pi(t-t_0)}\exp(-\frac{x_2^2 + x_3^2}{4(t-t_0)})\delta(x_1) \overset{x}{*} M(u_0(x)) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}[G_{t_0 t}(i\xi_1^2, -\xi_1, -\xi_2, -i)\times$$

$$\times\psi(0,0)](x) - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{4\pi(t-s)}\exp(-\frac{x_2^2 + x_3^2}{4(t-s)})\delta(x_1) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}[F_x[G_{st}(i\xi_1^2, -\xi_1, -\xi_2, -i)\times$$

$$\times\frac{\delta\psi(0,0)}{\delta w(s,x)}](\xi)](x)ds,$$

где $G_{st}(a_1, a_2, a_3, a_4)\psi(v_j(\cdot), w(\cdot))$ – отображение, применяемое по переменным $v_j(\cdot)$ следующим образом

$$G_{st}(a_1, a_2, a_3, a_4)\psi(v_j(\cdot), w(\cdot)) = \psi(v_1(\cdot) + a_1\chi(s, t, \cdot), v_2(\cdot) + a_2\chi(s, t, \cdot),$$

$$v_3(\cdot) + a_3\chi(s, t, \cdot), v_4(\cdot) + a_4\chi(s, t, \cdot), w(\cdot)).$$