Секция «Математика и механика»

О одном классе эволюционных уравнений и представлении их решений интегралами Фейнмана

Кравцева Анна Константиновна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: anna-conf@yandex.ru

В работе рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,q) = \frac{1}{2}\Delta_{A^{-1}T(A^T)^{-1}}u(t,q) + v(Cq)u(t,q),$$
$$u(0,q) = u_0(Cq).$$

Здесь T — ядерный симметричный положительно-определённый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, оснащённом скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. $v_k : H\times\ldots\times H \to \mathbb{R}$ — k-линейное непрерывное симметричное отображение, $k = 1,\ldots,2l$ ($l \geq 2$). $V_{2l}(x) = v_{2l}(x,\ldots,x)$. $V_{2l}(x) > 0$ при $x \neq 0$. При этом $r(x+y) \leq r(x) + r(y)$ $\forall x,y \in H$, где $r(x) = (V_{2l}(x))^{\frac{1}{2l}}$. Также выполнены следующие условия: $|v_k(x_1,\ldots,x_k)| \leq r(x_1)\cdot\ldots\cdot r(x_k)$, $v(x) = \sum\limits_{i=1}^{2l} v_i(x,\ldots,x)$.

Пусть $t > 0$, $E = \{x \in C([0,t],H) : x(t) = 0\}$, $A\colon H \to H$ — (вещественный) линейный ограниченный обратимый оператор. $E_0 = \{x \in E : x(t) \in A^{-1}T^{\frac{1}{2}}H$, п.в. $\exists x'(\tau) \in A^{-1}T^{\frac{1}{2}}H$, и $\int\limits_0^t (T^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))d\tau < +\infty\}$, $\Phi = \{u_0\colon H \to \mathbb{C}$, т.ч. существует аналитическое продолжение $\widetilde{u_0}\colon H^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, и $\exists\ C > 0$, $\frac{1}{4\|T\|} > \varepsilon > 0 : |\widetilde{u_0}(z)| \leq Ce^{\varepsilon\|z\|^2}\forall z \in H^{\mathbb{C}}\}$.

Теорема 1. Пусть $u_0 \in \Phi$, A, C — обратимые операторы из $B(H^{\mathbb{C}})$, $AC^{-1} = \lambda I + TB$, $|\lambda| > \|T\|\|B\|$. Существует аналитический путь $\varphi(\cdot)$, т.ч. $\varphi(t) \notin \sigma(C)$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(1)| > \|C\|$. Тогда задача Коши имеет решение, которое представляется в виде интеграла Фейнмана в смысле аналитического продолжения,

$$u(t,q) = \int\limits_E e^{-\int\limits_0^t v(C(q+x(\tau)))d\tau} u_0(C(x(0)+q)) e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t (T^{-1}Ax'(\tau),Ax'(\tau))d\tau} dx.$$

Случай, когда вместо операторов рассматриваются комплексные числа, содержится в статье [1].

Литература

1. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Бесконечномерные уравнения Шредингера с полиномиальными потенциалами и интегралы Фейнмана по траекториям. ДАН, 1, том 408, 2006, с. 28-33.

Слова благодарности

Автор благодарит профессора, д.ф.-м.н. Шавгулидзе Е. Т. за постановку задачи и руководство работой.