Секция «Математика и механика»

О суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда Фурье функций из пространства Лоренца

Жантакбаева Аягоз Мелисовна
Соискатель
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, мех-мат, Астана, Казахстан
E-mail: ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru

Пусть $1 \leq p < \infty, 0 < q \leq \infty$. Множество всех измеримых функций определенных на $[0,1]$ называется пространством Лоренца $L_{p,q}[0,1]$, если конечны величины
при $0 < q < \infty$,

$$\|f\|_{L_{p,q}[0,1]} = \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

при $q = \infty$,

$$\|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]} = \sup_{0 \leq t \leq 1} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty.$$

Здесь $f^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x : |f(x)| > \sigma\} < t\}$ - невозрастающая перестановка функции $f(t)$.

Пусть $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$. В работе [2] доказана теорема, в частности, параметры $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 \leq q \leq \infty$, если $f \in L_{p,q}[0,1]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} \left(\bar{a}_k\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}, \tag{1}$$

где $\bar{a}_k = \frac{1}{k} \left| \sum\limits_{r=1}^{k} a_r \right|$.

В работе [1] были анонсированы, что неравенство (1) выполняется и для средних вида $\tilde{a}_k = \left| \sum\limits_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k} \right|$ и $\overline{a}_k(\lambda) = \frac{1}{\left| \sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m \right|} \left| \sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m a_m \right|$, где последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет условию $\sup\limits_{1 \leq m \leq k} m^{2-\alpha} |\lambda_m - \lambda_{m+1}| \leq D \frac{1}{k^{\alpha}} \left| \sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m \right|$, $\alpha > \frac{1}{p'}$, $D > 0$.

Как следствие из последнего усреднения, получим

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, сопряженный параметр $p' : \ p' = \frac{p}{p-1}$ и параметр $0 < q \leq \infty$. Для функции f соответствует ряд Фурье $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$, параметр $\beta < \frac{1}{p}$. Если $f \in L_{p,q}[0,1]$. Тогда верно

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\beta - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{m^{\beta}} \right| \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}.$$

Получена также следующая

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, сопряженный параметр $p' : \ p' = \frac{p}{p-1}$ и параметр

$0 < q \le \infty$. Для функции f соответствует ряд Фурье $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$. Если $f \in L_{p,q}[0,1]$ и $\frac{1}{p} < \alpha$, тогда верно

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}} \right| \right)^{q} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \le c \|f\|_{L_{p,q}[0,1]}.$$

Литература

1. Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Вестник МГУ, сер. матем.механика, 2004. N2. С. 64-66.

2. Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье // Изв. РАН, сер. математика, 2000. Т. 64. N1. С. 93-122.