Секция «Математика и механика»

Носители мер со слабыми моментами

Косов Егор Дмитриевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ked_2006@mail.ru

Известно, что всякая вероятностная борелевская мера μ на сепарабельном банаховом пространстве X сосредоточена на компактно вложенном в X сепарабельном банаховом пространстве E, причем если μ на X имеет сильный момент порядка p, то и E можно выбрать с этим свойством (см. [1]). В этой работе аналогичное свойство исследуется для мер со слабыми моментами. Пусть X — пространство Фреше (полное метризуемое локально выпуклое пространство) с сопряженным X^*, μ — вероятностная борелевская мера на X со слабым моментом порядка $p \geq 1$, т.е. $X^* \subset L^p(\mu)$. Нас интересует существование компактно вложенного в X рефлексивного сепарабельного банахова пространства полной меры, для которого $E^* \subset L^p(\mu)$.

Говорят, что мера μ имеет среднее $m \in X$, если

$$f(m) = \int_X f(x)\,\mu(dx), \quad f \in X^*.$$

Теорема 1. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше, μ — вероятностная борелевская мера на X, $X^* \subset L^1(\mu)$. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *существует компактно вложенное рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры с $E^* \subset L^1(\mu)$,*

(ii) *для всякого μ-измеримого множества A мера $I_A\mu$ имеет среднее.*

Пусть μ — вероятностная борелевская мера слабого порядка $p > 1$ на сепарабельном пространстве Фреше X. Тогда оператор вложения X^* в $L_p(\mu)$ непрерывен при наделении X^* топологией Макки $\tau(X^*, X)$ (см. [2]). Поэтому корректно определен оператор $h\colon\ L^q(\mu) \to X$ $(q = \frac{p}{p-1})$, задаваемый равенством

$$\int_X f(x)g(x)\mu(dx) = f(h(g)).$$

Теорема 2. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше с вероятностной борелевской мерой μ слабого порядка $p > 1$. Тогда существование компактно вложенного в X сепарабельного рефлексивного банахова пространства E с $E^* \subset L^p(\mu)$ равносильно тому, что множество*

$$H := \{h(g)\colon\ g \in L^q(\mu),\ \|g\|_{L^q(\mu)} \leq 1\}$$

предкомпактно в X.

Пусть X —пространство Фреше с вероятностной мерой μ слабого второго порядка. Определим оператор $K\colon X^* \to X$ равенством

$$\langle f, Kg\rangle = \int_X f(x)g(x)\mu(dx).$$

Теорема 3. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и $X^* \subset L^2(\mu)$. Тогда существование компактно вложенного в X сепарабельного рефлексивного банахова пространства E с $E^* \subset L^2(\mu)$ равносильно тому, что для всякого уравновешенного $\sigma(X^*, X)$-компактного множества $S \subset X^*$ множество $K(S)$ предкомпактно в X.*

В случае банахового пространства X это условие равноильно компактности оператора K.

Литература

1. Богачев В.И. Основы теории меры. 2-е изд. Т. 1, 2. Москва – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2006.

2. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И. Ковариационные операторы вероятностных мер в локально выпуклых пространствах. Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23. С. 3–26.

Слова благодарности

Хочется выразить благодарность моему научному руководителю Владимиру Игоревичу Богачеву за ценные замечания и постоянное внимание к моей работе.