Секция «Математика и механика»

Продолжения соболевских функций на бесконечномерных пространствах

Реброва Елизавета Александровна

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: octaedr@yandex.ru

Для произвольного локально выпуклого пространства X через $\mathcal{FC}_b^\infty(X)$ будем обозначать класс всех функций f на X вида

$$f(x) = \varphi(l_1(x), \ldots, l_n(x)),\ l_i \in X^*,\ \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Пусть γ — гауссовская мера на X, H — ее пространство Камерона–Мартина (см. [1]), $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H.

Положим $\partial_h f(x) = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}[f(x+th) - f(x)]$ для всех $h \in H$. Для $p \le 1$ и $r \in \mathbb{N}$ соболевская норма $\|\cdot\|_{p,r}$ определяется формулой

$$\|f\|_{p,r} = \sum_{k=0}^{r} \biggl(\int_X \Bigl[\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} (\partial e_{i_1}, \ldots, \partial e_{i_k} f)^2 \Bigr]^{p/2} \gamma(dx) \biggr)^{1/p}.$$

Класс Соболева $W^{p,k}(\gamma)$ есть пополнение $\mathcal{FC}_b^\infty$ относительно заданной нормы. Сужение гауссовской меры γ на произвольную область Ω в X позволяет аналогичным образом определить соболевскую норму $\|f\|_{p,r}$ для функций, определенных на Ω, и ввести соболевский класс $W^{p,k}(\Omega)$ как пополнение $\mathcal{FC}_b^\infty(\Omega)$ по ней.

Продолжением функции f из класса $W^{p,k}(\Omega)$ называется функция $\tilde{f} \in W^{p,k}(X)$, такая что $\tilde{f}|_\Omega = f$. Возникает естественный вопрос: всегда ли такое продолжение существует? Если нет, то для каких областей Ω все соболевские функции из $W^{2,1}(\Omega)$ имеют продолжения из класса $W^{p,k}(X)$? Для случая пространства X конечной размерности существует несколько теорем, в значительной степени описывающих ситуацию. Построены области, с которых функции нельзя продолжить функциями того же соболевского класса, а для достаточно хороших областей (ограниченных и с липшицевой границей) установлено, что продолжение существует и даже задается непрерывным линейным оператором (см. [2]). Однако в бесконечномерном случае вопрос остается открытым. Даже для «хороших» областей Ω (например, кубов) неизвестно, существуют ли соболевские продолжения всех функций из $W^{p,k}(\Omega)$. Следующая теорема, которой и посвящен доклад, устанавливает полезную связь между случаями конечной и бесконечномерной размерности. Будем считать, что γ — счетная степень стандартной гауссовской меры на прямой, рассматриваемая на $X = \mathbb{R}^\infty$; тогда $H = l^2$.

Теорема 1 *Пусть K — произвольный параллелепипед в $\mathbb{R}^\infty$. Тогда функции из $W^{2,1}(K)$ соболевски продолжаются на все пространство тогда и только тогда, когда для всякой функции f из $W^{2,1}(K_n)$, где $K_n = K|_{\mathbb{R}^n}$, существует продолжение $\tilde{f}$ в классе $W^{2,1(\mathbb{R}^n)}$ с оценкой на соболевскую норму $\|\tilde{f}\|_{2,1} \le C\|f\|_{2,1}$, где C — константа, не зависящая от размерности пространства n.*

Литература

1. Богачев В.И. Гауссовские меры. Наука, М., 1997.
2. Adams R.A., Fournier J.J.F. Sobolev spaces. 2nd ed. Academic Press, New York, 2003.

Слова благодарности

Я благодарна моему научному руководителю Богачеву Владимиру Игоревичу за оказанную всестороннюю помощь. Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00518, 11-01-12104-офи-м и 11-01-90421-Укр-ф-а.