## Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

### Теорема о неявной функции на выпуклом множестве в окрестности анормальной точки

***Жуковский С.Е.[1], Мингалеева З.Т.[2]***

*1 - Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, 2 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия*

*E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru*

Пусть заданы банаховы пространства $X$, $Y$, топологическое пространство $\Sigma$, выпуклое замкнутое множество $U \subset X$, отображение $F : X \times \Sigma \to Y$ и точки $x_* \in U$, $\sigma_* \in \Sigma$, для которых $F(x_*, \sigma_*) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \sigma) = 0, \;\; x \in U, \tag{1}$$

в котором $x$ – неизвестное, а $\sigma$ – параметр. Вопрос о существовании неявной функции в задаче (1) в случае, когда условие Робинсона не выполняется, изучен А.В. Арутюновым в работах [1–3] в предположении, что $U$ является замкнутым выпуклым конусом. Здесь мы приводим обобщение этого результата на случай, когда $U$ – замкнутое выпуклое множество.

Пусть $G : X \to Y$ – заданное дважды дифференцируемое в точке $x_*$ отображение, $G(x_*) = 0$. Положим $\mathcal{U} = \mathrm{cone}\,(U - \{x_*\})$.

**Определение.** Пусть существует

$$h \in \mathcal{U} : \;\; h \in \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*), \;\; -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, h] \in \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U}.$$

Отображение $G$ назовем 2-регулярным в точке $x_*$ относительно множества $U$ по направлению $h$, если имеет место

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, \mathcal{U} \cap \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)] = Y.$$

Следующая теорема дает достаточные условия существования неявной функции в задаче (1). Предположим, что $F$ дважды непрерывно дифференцируемо по $x$ равномерно по $\sigma$ в некоторой окрестности точки $(x_*, \sigma_*)$. При каждом $\sigma$, достаточно близком к $\sigma_*$, отображение $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\cdot, \sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, не зависящей от $\sigma$. Отображения $F(x_*, \cdot)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \cdot)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \cdot)$ непрерывны в окрестности точке $\sigma_*$. Обозначим

$$V = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\mathcal{U}.$$

Предположим, что линейная оболочка $\mathrm{span}\, V$ конуса $V$ замкнута, и это подпространство топологически дополняемо. Через $\pi$ будем обозначать некоторый линейный непрерывный оператор, проектирующий $Y$ на какое-нибудь подпространство, дополняющее $\mathrm{span}\, V$. Через $B_X(x, r)$ далее будем обозначать шар с центром в точке $x$ радиуса $r$.

**Теорема.** Пусть относительная внутренность $\mathrm{ri}V$ непуста, и отображение $F(\cdot, \sigma_*)$ 2-регулярно в точке $x_*$ относительно $U$ по некоторому направлению $h \in X$. Тогда для произвольного вектора $l \in \mathrm{ri}V$ существуют такие окрестность $O$ точки $\sigma_*$, числа $c \geq 0$, $\delta > 0$ и непрерывное отображение $x(\cdot) : O \to U$, что $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$,

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq c\,(\Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \Delta_3(\sigma) + \Delta_4(\sigma)) \quad \forall \sigma \in O.$$

Здесь

$$\Delta_1(\sigma) = \sup\left\{\left\|\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma)x\right\| : x \in \mathrm{span}(U - \{x_*\}),\ \|x\| \leq 1\right\},$$

$$\Delta_2(\sigma) = \sup\left\{\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma)x\right\| \,:\, x \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*) \cap \mathcal{U}, \quad \|x\| \leq 1\right\},$$

$$\Delta_3(\sigma) = \|F(x_*, \sigma)\|\,,\ \ \Delta_4(\sigma) = \rho\,(-F(x_*, \sigma), V_\delta)^{1/2}\,,$$

$\rho$ — расстояние от точки до множества, $V_\delta = \mathrm{cone}(B_Y(l, \delta)) \cap \mathrm{span}\, V$.

### Литература


1. Арутюнов А.В. К теоремам о неявной функции в анормальных точках // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2010. Т. 16. No 1. С. 30-39.

2. Арутюнов А.В. Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности анормальной точки // Матем. заметки. 2005. Т. 77. No 4. С. 483-497.

3. Арутюнов А.В. Теорема о неявной функции на конусе в окрестности анормальной точки // Матем. заметки. 2005. Т. 78. No 4. С. 619-621.


### Слова благодарности

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю профессору Араму Владимировичу Арутюнову за постоянное внимание к работе.