Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Об одной задаче оптимального управления разработкой возобновляемых ресурсов

Вещинская Виктория Валерьевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: luce.etterna@gmail.com

В данной работе рассматривается динамическая система, заданная уравнением переноса с постоянными коэффициентами

$$x_t(t,l) + gx_l(t,l) = -\mu x(t,l) \quad (t \in [0,T], l \in [0,L]). \quad (1)$$

Здесь $x(t,l)$ – скалярная фазовая переменная, $t \in [0,T]$ – независимая временная переменная, $l \in [0,L]$ – независимая одномерная пространственная переменная, $T > 0$, $L > 0$, $g > 0$ и $\mu > 0$ – заданные параметры.

На систему (1) накладывается начальное условие общего вида и нелокальное краевое условие:

$$x(0,l) = x_0(l) \quad (l \in [0,L]); \quad x(t,0) = p(t) + \beta \int_0^L x(t,l)dl \quad (t \in [0,T]), \quad (2)$$

где $x_0(\cdot) : [0,L] \mapsto R_1^+$, $p(\cdot) : [0,T] \mapsto R_1^+$ – заданные функции, $\beta > 0$ – заданный параметр.

Система (1) – (2) возникает при моделировании роста леса [3, 4].

С помощью метода характеристик [1, 2] представим решение задачи в виде

$$x(t,l) = \begin{cases} a\left(t - \frac{l}{g}\right)e^{-\frac{\mu}{g}l}, & l \in [0,gt] \\ x_0(l-gt)e^{-\mu t}, & l \in [gt,L] \end{cases} (t \in [0,T]). \quad (3)$$

где через $a(\cdot)$ обозначена функция, задающая краевое условие (2).

Теорема 1 Пусть $x_0(\cdot)$ и $p(\cdot)$ – кусочно непрерывно дифференцируемые функции и $x_0(0) = p(0) + \beta \int_0^L x_0(l)dl$. Тогда решение системы (1) – (2) существует, единственно и имеет вид (3), где

$$a(t) = p(t) + \beta e^{-\mu t} \int_0^{L-gt} x_0(l)dl + g\beta e^{(g\beta-\mu)t} \int_0^t e^{(\mu-g\beta)s} p(s)ds +$$

$$g\beta^2 e^{(g\beta-\mu)t} \int_0^t e^{-g\beta s} \int_0^{L-gs} x_0(l)dlds \ (t \in [0,T]).$$

Определим функцию $x_0(l)$, задающую начальное условие, следующим образом: $x_0(l) = \bar{x}(l)$, при $l \in [0, \bar{l})$, и $x_0(l) = (1-\alpha)\bar{x}(l)$, при $l \in [\bar{l}, L]$, где $\bar{x}(l) = \gamma e^{-\frac{\mu}{g}l}$ $(l \in [0, L])$ – стационарное решение уравнения (1) без краевого условия, $\gamma = \bar{x}(0) > 0$ – некоторая константа.

Пусть $p(\cdot) \in C$, где C – множество кусочно непрерывно-дифференцируемых функций принимающих значения в $[0, P]$. Пусть $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ и $\bar{l} \in [\bar{l}^-, \bar{l}^+]$ $(0 \le \alpha^- < \alpha^+ \le 1$, $0 \le \bar{l}^- < \bar{l}^+ \le L)$.

Определим функционалы на $C \times [\alpha^-, \alpha^+] \times [\bar{l}^-, \bar{l}^+]$:

$$B(p(\cdot), \alpha, \bar{l}) = \alpha \int_{\bar{l}}^{L} \bar{x}(l)dl - h\int_0^T p(t)dt; \quad E(p(\cdot), \alpha, \bar{l}) = \int_0^L x(T, l)dl$$

и

$$U(p(\cdot), \alpha, \bar{l}) = B(p(\cdot), \alpha, \bar{l}) + \sigma E(p(\cdot), \alpha, \bar{l}),$$

где $\sigma \ge 0$ – заданный весовой множитель.

В работе решается задача максимизации функционала $U(p(\cdot), \alpha, \bar{l})$ в предельном случае $L \to \infty$.

Литература

1. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 2005. с. 52-66.

2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1985.

3. Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R., Xabadia A. Maximum principle for a size-structured model of forest and carbon sequestration management. // Applied Mathematics Letters 21, 2008. p. 1090-1094.

4. Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R., Xabadia A. A bang-bang regime in optimal harvesting of size-structured populations. // Nonlinear analysis 71, 2009. p. 2331-2336.