

Исследование решения контрастной структуры типа ступенька**в задаче реакция-адвекция-диффузия.****Антипов Е.А.¹, Ягремцев А.В.²**¹ АспирантМосковский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия² СтудентМосковский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, Москва, РоссияE-mail: a.evgen.a@yandex.rugremlin1980@yandex.ru**Постановка задачи.** Рассматривается краевая задача с условиями Дирихле:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(u, x), \quad (x, t) \in D = \{x \in (0; 1); t \in (0; +\infty)\}$$

$$u(0, t, \varepsilon) = u^0, \quad u(1, t, \varepsilon) = u^1, \quad u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon),$$

где $A(u, x)$, $B(u, x)$ - достаточно гладкие функции.

Условие А1. Пусть вырожденное уравнение $\bar{A}(\bar{u}, x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B(\bar{u}, x) = 0$ имеет два решения: $\bar{u}(x) = \varphi_l(x)$, $\bar{u}(x) = \varphi_r(x)$, такие что $\varphi_l(0) = u^0$, $\varphi_r(1) = u^1$.

Условие А2. Пусть выполняются неравенства $A(\varphi_l, x) > 0$, $A(\varphi_r, x) < 0$, $x \in [0, 1]$.

Будем строить решение задачи (1) в виде контрастной структуры типа ступеньки (КСТС), то есть такое, которое по разные стороны от некоторой точки $x = \hat{x}$ близко к решениям $\varphi_l(x)$ и $\varphi_r(x)$ вырожденного уравнения, а в окрестности точки $x = \hat{x}$ происходит быстрый переход решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) от $\varphi_l(x)$ к $\varphi_r(x)$. Точка $x = \hat{x}(t)$ заранее не известна и находится в ходе построения асимптотики.

Математическое моделирование неоднородных волноводов

Боголюбов Николай Александрович

студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: russell67@yandex.ru

Работа посвящена решению спектральной задачи теории волноводов - расчету постоянных распространения прямоугольного волновода со вставками на основе метода конечных элементов. Волновод предполагается регулярным, то есть однородным вдоль оси. Стенки волновода идеально проводящие. Диэлектрик вставок неоднородный в поперечном сечении и однородный вдоль оси волновода. Необходимо найти постоянные распространения волновода, то есть решить задачу на собственные значения. С помощью техники метода конечных элементов задача сводится к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения. Для определения постоянных распространения высших мод волновода необходимо применять метод обратных итераций со сдвигом, для чего нужно производить факторизацию матрицы жесткости. Но свойства матриц алгебраической системы сильно осложняют эту задачу, так как многие стандартные методы либо не работают, либо «портят» матрицы, так как они перестают быть разреженными. Одним из способов выхода из этого положения является применение для факторизации матриц стратегии Банча-Кауфман. В работе построены дисперсионные кривые, представляющие зависимость постоянной распространения от частоты, для различных вставок. Дисперсионные кривые – это основные характеристики любой волноведущей системы: радиоволновода, оптического волновода (световода), акустического волновода. С их помощью можно установить, сколько мод распространяется в волноводе на заданной частоте, и определить режим работы волновода: одномодовый, маломодовый или многомодовый. Ответ на этот вопрос важен в практическом отношении. Самый выгодный режим одномодовый, так как при этом моды «не мешают» друг другу, то есть, нет межмодовой дисперсии. Однако одномодовый режим трудно осуществить практически. Поэтому очень важно за счет выбора соответствующего заполнения волновода максимально «разнести» частоту отсечки основной моды и частоту отсечки следующей за ней моды, решив обратную задачу, и установив максимальный частотный диапазон одномодового режима.

Математическое моделирование в нелинейной оптике. Темные солитоны.**Болотина Н.В.***Студентка 5 курса**Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,**физический факультет, Москва, Россия**E-mail:natusikbol@gmail.com*

В работе изучается поведение пространственных темных солитонов размерности (1+1) в керровской и некерровской средах с одинаковым входным пучком.

В 1973г. было обнаружено, что волоконные световоды могут поддерживать распространение типа временных солитонов в случае “нормальной” дисперсии групповой скорости. Такие солитоны проявляются как провалы интенсивности по отношению к ее постоянному (ненулевому) фону и называются темными солитонами. Пространственные темные солитоны также могут формироваться в оптических волноводах и в сплошной среде, если показатель преломления уменьшается при возрастании интенсивности (самодефокусирующая нелинейность). Темные солитоны разделяют на черные и серые в зависимости от того, достигает ли провал амплитуды нулевого значения.

В рамках кубического нелинейного уравнения Шредингера для среды с керровской нелинейностью был использован метод обратной задачи рассеяния для анализа генерации темных пространственных солитонов. В ходе работы были построены темные и серые пространственные солитоны в среде с керровской нелинейностью для входного пучка вида $u(0, x) = u_0 \text{th}(ax)$, где отношение u_0 / a - произвольно. Именно от этого значения зависит число темных солитонов, генерирующихся в среде.

В случае среды с некерровской нелинейностью обобщенное нелинейное уравнение Шредингера сводилось к уравнению Кортевега де Фриза в приближении малой амплитуды. В ходе работы были построены профили темных солитонов в среде с некерровской

нелинейностью вида $F = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+12I)^2} - 1 \right]$ и входного пучка вида $u(0, x) = u_0 \text{th}(ax)$. Было

показано, что темные солитоны в среде с насыщающейся нелинейностью обладают сдвигом фазы и интенсивность их может быть отлично от нуля. Критерием устойчивости темного солитона является производная по скорости перенормированного импульса, который зависит только от поперечной части оператора градиента амплитуды. Если эта производная положительна, то темный солитон устойчив и сохраняет свою форму и фазу при распространении в среде. В противном случае неустойчивый темный солитон постепенно преобразуется устойчивый серый солитон, скорость которого больше, чем у первоначального черного солитона.

Математическое моделирование сред с временной диссипацией при помощи дробного дифференцирования**Смирнова Дарья Дмитриевна**

Студентка 3 курса

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

физический факультет, Москва, Россия

d_d_smirnova@mail.ru

В работе исследуется поведение электромагнитного поля в средах, обладающих временной диссипацией, или памятью, то есть состояние каких-либо свойств среды зависит от значений этих свойств в предыдущие моменты времени. Памятью в той или иной мере обладает большое количество сред, например, полимеры. Уравнения Максвелла при учете памяти среды оказываются неприменимы из-за того, что данный тип сред обладает фрактальными характеристиками, поэтому для получения аналогов этих уравнений используется аппарат дробного интегро-дифференцирования. Для построения математической модели была выбрана регуляризованная дробная производная

$$\partial_{0t}^{\alpha}(y(t)) = \begin{cases} y(t), \alpha = 0, \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{d^n y(t')}{dt'^n} (t-t')^{\alpha-n+1} dt', n-1 < \alpha \leq n, n \in N \end{cases} \quad [3, 5]$$

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера.

В общем случае функция, задающая свойство памяти, может быть выбрана достаточно произвольно. В данной работе используется наиболее простой и часто встречающийся вид функции памяти - степенной: $g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$, где параметр функции памяти $\alpha \in (0,1)$. Для этого случая показана связь между параметром функции памяти и фрактальной размерностью среды [2].

Также при помощи аппарата дробного интегро-дифференцирования, на основе аналогов уравнений Максвелла, верных для данного типа сред, получена система уравнений для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля в случае произвольных аналитически заданных распределений зарядов и токов в среде, а также произвольных аналитических функций координат и времени, описывающих диэлектрическую и магнитную проницаемости среды. Полученная система интегро-дифференциальных уравнений решается численно методом конечных разностей в прямоугольной области с начальными и граничными условиями, заданными аналитически [4].

Литература

1. Боголюбов А.Н., Потапов А.Н., Рехвиашвили С.Ш. Метод дробного интегро-дифференцирования в классической электродинамике // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. №3. 2009г.
2. Кобелев В.Л., Кобелева О.Л., Кобелев Я.Л., Кобелев Л.Я. О диффузии через фрактальную поверхность // ДАН, 1997, Т.355, №3, С.326-327.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272с.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы – М.: Наука, 1982, - 269 с.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения - Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики - М.: Наука, 1972. – 735с.
7. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. – N.Y.: Freeman, 1982, 468p.

Математическое моделирование отражения электромагнитной волны от радиопоглощающего материала в безэховой камере.

Никитенко Алексей Викторович

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

физический факультет, Москва, Россия

E-mail: kocheku@gmail.com

Для экспериментальных исследований характеристик рассеяния объектов и параметров антенн используются как открытые полигоны, так и безэховые камеры (БЭК). В последнее время большое распространение получили так называемые компактные полигоны, состоящие из БЭК и коллиматора, с помощью которого формируется плоское поле в рабочей зоне.

Хотя компактные полигоны характеризуются большой точностью проводимых измерений, современные требования к объектам измерений и антеннам повышаются, что предъявляет более жесткие требования к полигонам, в частности, к неравномерности поля в рабочей зоне. Одним из факторов, влияющих на неравномерность поля, является наличие поглощающего материала как вблизи коллиматора, так и вблизи объекта измерений. Существенный вклад в неравномерность также вносит поле облучателя, отраженное от пола БЭК и затем переотраженное от зеркала коллиматора. Во всех перечисленных случаях радиопоглощающий материал работает при углах падения и отражения, далеких от нормали, в то время как широко использующиеся в БЭК пирамидальные материалы оптимизированы для нормального падения. Целью данной работы является экспериментальная и теоретическая оценка эффективности известных пирамидальных материалов при углах, близких к скользящим, и выбор эффективной модели расчета их отражающих свойств для последующей оптимизации за счет изменения формы пирамид и распределения диэлектрической проницаемости по глубине.

Построение математической модели основано на разложении поля облучателя в спектр плоских волн, для которых рассчитывается отражение от поглощающего материала. Отраженные плоские волны получены двумя способами. В первом используется плоскосоистое приближение поглощающего материала. Второй способ основан на применении метода *rigorous coupled-wave analysis (RCWA)* [1] с использованием метода *enhanced transmittance matrix approach (ETMA)* [2] при решении системы уравнений. По результатам расчетов получены графики зависимости амплитуды отраженной волны от частоты для различных поляризаций и материалов (пирамидального и материала в виде треугольной призмы), используемых в эксперименте (рис.1, 2). Установлены границы применимости плоскосоистого приближения.

Экспериментальное исследование проводилось на компактном полигоне ИТПЭ РАН, с использованием поглощающего материала Eccosorb VHP-12, стандартного облучателя, коллиматора и сканера с областью сканирования 8x8 м.

Литература

1. M.G. Morahan, E.B. Grann, D.A. Pommet, and T.K. Gaylord, "Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings," J. Opt. Soc. Am. A 12, 1068-1086 (1995).
2. M.G. Morahan, E.B. Grann, D.A. Pommet, and T.K. Gaylord, "Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach," J. Opt. Soc. Am. A 12, 1077-1086 (1995).

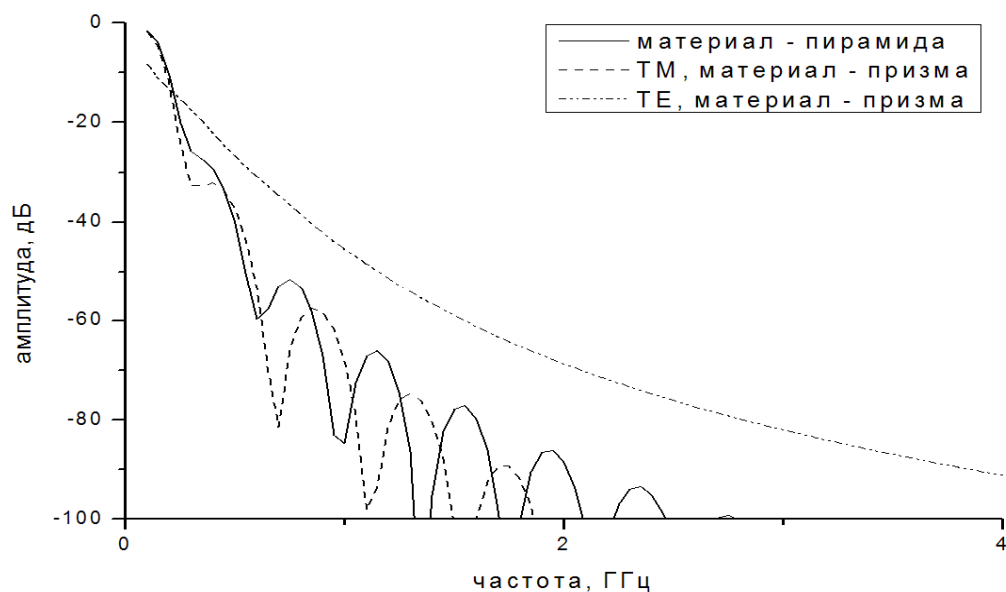


Рис. 1: Зависимость амплитуды отраженной волны от частоты, нормальный угол падения.

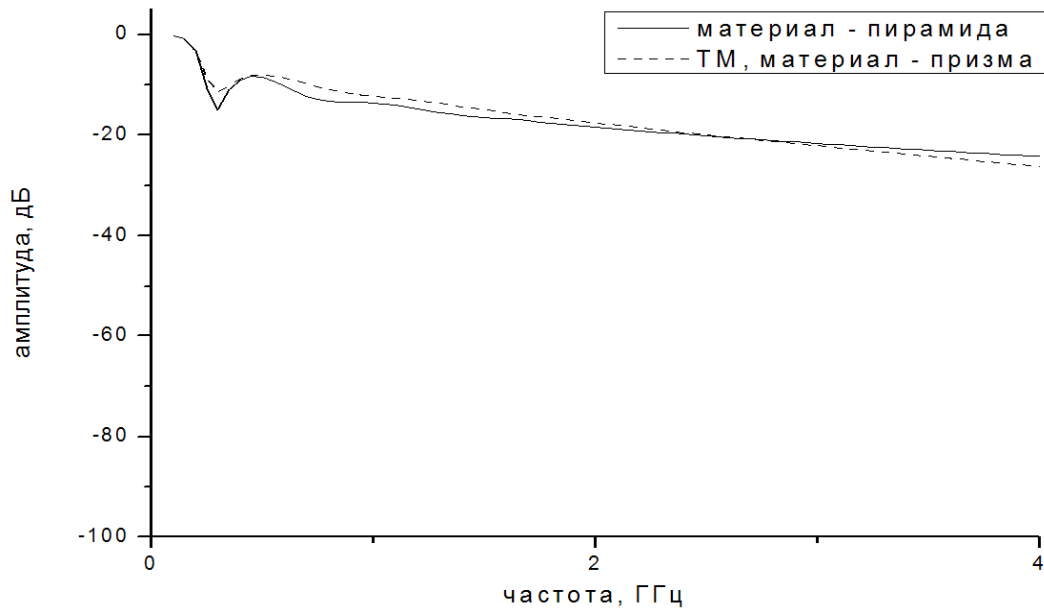


Рис. 2: Зависимость амплитуды отраженной волны от частоты, угол падения 80° .

Математическое моделирование волновода переменного поперечного сечения с входящими углами

Ерохин Александр Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

физический факультет, Москва, Россия

E-mail: forlector@mail.ru

В настоящее время волноводы с входящими углами широко используются в микроволновых устройствах. В связи с этим задача поиска адекватной математической модели для систем такого типа стала весьма актуальной. Целью работы является построение модели, учитывающей не только современные тенденции в численных методах, но и результаты теоретических исследований данной проблемы.

В работе рассматривается волновод переменного поперечного сечения с входящим углом. Распространение волн в таком волноводе описывается с помощью краевой задачи для уравнения Гельмгольца с парциальными условиями излучения на бесконечности.

Так как в современной литературе исследуются в основном системы с постоянным поперечным сечением, то на сегодняшний день имеется большое количество работ, посвященных расчету собственных функций сечений с входящим углом. Одним из часто используемых методов численного решения таких задач является метод конечных элементов. Асимптотическое поведение решения в области угла может быть исследовано теоретически, поэтому, зная особенность решения, можно добавить в систему пробных функций, используемых в методе конечных элементов, сингулярную функцию, описывающую поведение решения в точке с особенностью. Такой подход позволяет рассчитывать собственные функции сечений с входящим углом с достаточно высокой точностью.

Таким образом, наличие хорошо разработанных алгоритмов построения собственных функций поперечных сечений определило использование метода сечений и для нерегулярных волноводов с переменным поперечным сечением. Данный метод заключается в поиске решения уравнения Гельмгольца в виде его разложения по собственным функциям поперечных сечений нерегулярной части волновода.

На основе предложенной модели построен численный алгоритм расчета коэффициентов отражения и прохождения электромагнитных волн, распространяющихся в волноводе переменного сечения с входящими углами. Исследованы границы его применимости. Получена зависимость коэффициентов от величины входящего угла.

О сингулярно возмущенной параболической системе в случае пересечения корней вырожденного уравнения**Костин А.В.***Аспирант**Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия
E-mail: alex-kostin@mail.ru*

Рассматривается сингулярно возмущенная параболическая система двух уравнений

$$\varepsilon^2(u_t - u_{xx}) + g(u, v, x, t, \varepsilon) = 0, \quad v_t - \varepsilon^p v_{xx} + f(u, v, x, t, \varepsilon) = 0, \quad (x, t) \in D \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$u_x(0, t, \varepsilon) = u_x(1, t, \varepsilon) = 0, \quad v_x(0, t, \varepsilon) = v_x(1, t, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x),$$

где ε – малый параметр, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $p > 1$, $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), t \in (0, T]\}$, $u^0(x)$ и $v^0(x)$ – заданные функции.**Условие 1.** $g \in C^2(\bar{\Omega})$, $f \in C^2(\bar{\Omega})$, где $\Omega = G \times [0, \varepsilon_0]$, $G = I_u \times \Sigma$, $\Sigma = I_v \times D$, I_u и I_v – некоторые интервалы изменения переменных u и v , $u_0(x) \in I_u$, $v_0(x) \in I_v$ при $x \in [0, 1]$.**Условие 2.** Пусть функция g представима в виде

$$g(u, v, x, t, \varepsilon) = h(u, v, x, t)(u - \varphi_1(v, x, t))(u - \varphi_2(v, x, t)) - \varepsilon g_1(u, v, x, t, \varepsilon), \quad (3)$$

где $h \in C^2(\bar{G})$, $\varphi_1 \in C^2(\bar{\Sigma})$, $\varphi_2 \in C^2(\bar{\Sigma})$, $h(u, v, x, t) > 0$ в области \bar{G} , а значения функций φ_1 и φ_2 лежат в интервале I_u при $(v, x, t) \in \bar{\Sigma}$.

Из условия 2 следует, что уравнение

$$g(u, v, x, t, 0) = 0 \quad (4)$$

имеет два корня $u = \varphi_1(v, x, t)$ и $u = \varphi_2(v, x, t)$.**Условие 3.** В области Σ существует гладкая поверхность $v = v_0(x, t)$, $(x, t) \in \bar{D}$, такая, что для $(x, t) \in \bar{D}$ выполнены соотношения

$$\varphi_1(v, x, t) > \varphi_2(v, x, t) \text{ при } v < v_0(x, t),$$

$$\varphi_1(v_0(x, t), x, t) = \varphi_2(v_0(x, t), x, t),$$

$$\varphi_1(v, x, t) < \varphi_2(v, x, t) \text{ при } v > v_0(x, t).$$

Условие 3 означает, что корни $\varphi_1(v, x, t)$ и $\varphi_2(v, x, t)$ уравнения (4) пересекаются. Используя эти корни, построим решение вырожденной задачи, получающейся из (1), (2) при $\varepsilon = 0$. При этом построении важную роль играет соотношение между начальной функцией $v^0(x)$ и значением $v_0(x, 0)$ функции $v_0(x, t)$. Ограничимся рассмотрением следующего случая.

Условие 4. Пусть $v^0(x) < v_0(x, 0)$, $x \in [0, 1]$.

При этом условии рассмотрим две задачи:

$$v_t + f(\varphi_1(v, x, t), v, x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in D_1, \tag{5}$$

$$v(x, 0) = v^0(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$v_t + f(\varphi_2(v, x, t), v, x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in D_2, \tag{6}$$

$$v(x, t_0(x)) = v_0(x, t_0(x)), \quad x \in [0, 1],$$

где $D_1 = \{(x, t) \in R^2 : 0 < t < t_0(x), x \in (0, 1)\}$, $D_2 = \{(x, t) \in R^2 : t_0(x) < t \leq T, x \in (0, 1)\}$, функция $t_0(x)$ играет роль параметра.

Условие 5. Пусть существует гладкая функция $t_0(x)$, такая, что $0 < t_0(x) < T$, $x \in [0, 1]$, и задачи (5) и (6) имеют единственные решения $v = v_1(x, t)$ и $v = v_2(x, t)$, удовлетворяющие соотношениям

$$v_1(x, t) < v_0(x, t) \text{ при } (x, t) \in D_1, \quad v_2(x, t) > v_0(x, t) \text{ при } (x, t) \in D_2,$$

$$v_1(x, t_0(x)) = v_2(x, t_0(x)) = v_0(x, t_0(x)) \text{ при } x \in [0, 1].$$

Введем функцию $\hat{v}(x, t)$:

$$\hat{v}(x, t) = \begin{cases} v_1(x, t), & (x, t) \in D_1, \\ v_2(x, t), & (x, t) \in D_2 \end{cases}$$

и положим $\hat{u}(x, t) = \varphi(\hat{v}(x, t), x, t)$, где

$$\varphi(v, x, t) = \begin{cases} \varphi_1(v, x, t) & \text{при } v \leq v_0(x, t), \quad (x, t) \in D, \\ \varphi_2(v, x, t) & \text{при } v \geq v_0(x, t), \quad (x, t) \in D. \end{cases}$$

Отметим, что в отличие от $\hat{v}(x,t)$ функция $\hat{u}(x,t)$ имеет, вообще говоря, на кривой $t_0(x)$ разрывы (скачки) первой и второй производных.

Условие 6. Пусть $g_1(\varphi_i(v_0(x,t), x, t), v_0(x,t), x, t, 0) > 0$, $(x, t) \in \bar{D}$, где g_1 - функция из (3).

Условие 7. Начальная функция $u^0(x)$ лежит в области влияния точки покоя $u = \varphi_1(v^0(x), x, 0)$ присоединенного уравнения

$$\frac{du}{d\tau} + g(u, v^0(x), x, 0, 0) = 0, \tau > 0.$$

Введем область $D_c = \{(x, t) \in R^2 : x \in (0, 1), t_1 < t \leq T\}$, где $t_1 = t_{\min} - \nu$, $t_{\min} = \min_{x \in [0, 1]} t_0(x)$, ν - некоторое малое положительное число, такое, что $t_1 > 0$.

Теорема. Если выполнены условия 1-7, то для любого достаточно малого $\delta > 0$ при достаточно малых ε существует решение $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), (2), имеющее асимптотическое представление

$$u(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{u}(x, t) + \Pi_0(x, \tau) + O(\varepsilon) & \text{для } (x, t) \in \bar{D} \setminus D_c, \\ \hat{u}(x, t) + O(\varepsilon^{1/2}) & \text{для } (x, t) \in D_c, \end{cases}$$

$$v(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{v}(x, t) + O(\varepsilon) & \text{для } (x, t) \in \bar{D} \setminus D_c, \\ \hat{v}(x, t) + O(\delta \varepsilon^{1/2}) & \text{для } (x, t) \in D_c, \end{cases}$$

где $\Pi_0(x, \tau)$ - пограничная функция нулевого порядка ($\tau = t / \varepsilon^2$).

Теорема доказывается с помощью метода дифференциальных неравенств, т.е. путем построения подходящих верхнего и нижнего решений.

Литература

1. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R. Singularly perturbed partly dissipative reaction-diffusion systems in case of exchange of stabilities // Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik Berlin, Preprint No. 572, Berlin 2000.
2. Pao C.V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, New York and London. 1992.
3. Бутузов В.Ф. Существование и асимптотическая устойчивость стационарного решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в случае пересечения корней вырожденного уравнения // Дифференц. ур-ния. 2006. Т. 42. № 2. С. 221-232.

Движущиеся контрастные структуры типа всплеска в уравнениях реакция-диффузия

Пыркин Владимир Андреевич

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет,
Москва, РоссияE-mail: forward01@bk.ru

В данной работе рассматривается уравнение реакция-диффузия:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (0,1)$$

$$u_x(0, t, \varepsilon) = u_x(1, t, \varepsilon) = 0$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_0(x, \varepsilon),$$

где $f(u, x, \varepsilon)$ является достаточно гладкой функцией. Задача рассматривается при достаточно малых ε . Решение задачи ищется в виде контрастной структуры типа всплеска, т.е. такое, которое имеет в некоторой точке $x = \mathfrak{X}(t, \varepsilon)$ локальный экстремум.

Решение будем искать в виде:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i [\bar{u}_i(x) + \Pi_i(\rho_0) + R_i(\rho_1) + Q_i(\rho)],$$

где \bar{u} , Π , R и Q соответственно регулярный, левый и правый пограничные ряды и ряд, определяющий сам всплеск. Отметим, что члены пограничных рядов Π и R определяются стандартным способом (см. [1]).

Для формулировки условий существования контрастной структуры типа всплеска, мы обращаемся к классическим [1] и недавно полученным результатам [3].

Условие 1.

Пусть вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет единственный корень относительно переменной u равный $\varphi(x)$:

$$f(\varphi(x), x, 0) = 0$$

Причем $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$ при $x \in (0,1)$.

Условие 2.

Пусть существует функция $\psi(x)$ такая, что

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(u, x, 0) du = 0$$

и для всех $x \in (0,1)$: $f(\psi(x), x, 0) < 0$. Пусть также существует точка $s \in (\varphi(x), \psi(x))$ такая что:

$$\int_{\varphi(x)}^s f(u, x, 0) du > 0.$$

Были получены задачи для функций Q_0, Q_1 и Q_2 , которые позволяют с помощью условия разрешимости (см. [2]) построить асимптотическое приближение скорости движения всплеска.

Здесь и далее, знак «тильда» будет означать, что значение берется в точке $(\bar{u}_0 + Q_0, \bar{\epsilon}_0, 0)$. «Черта», в свою очередь, означает, что значение берется в точке $(\varphi(x_0), \bar{\epsilon}_0, 0)$.

Задача для функции Q_0 .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_0}{d\rho^2} &= f(\tilde{\varphi}(\bar{\epsilon}_0) + Q_0, \bar{\epsilon}_0, 0) \quad \rho \in \mathfrak{R} \\ \frac{dQ_0}{d\rho}(\rho=0) &= 0 \quad Q_0(\pm\infty) = 0 \end{aligned}$$

Задача для функции Q_1 .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1}{d\rho^2} &= \tilde{f}_u Q_1 + h_1 + h_2, \quad \text{где} \\ h_1 &= (\tilde{f}_x - \bar{f}_x)(\bar{\epsilon}_1 + \rho) + (\tilde{f}_u - \bar{f}_u)\varphi'(x)(\bar{\epsilon}_1 + \rho), \\ h_2 &= \tilde{f}_\epsilon - \bar{f}_\epsilon, \end{aligned}$$

Задача для функции Q_2 .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_2}{d\rho^2} + \dot{x}_0 \frac{dQ_1}{d\rho} + \dot{x}_1 \frac{dQ_0}{d\rho} + \frac{d^2 Q_0}{d\rho^2} &= Qf_2 \\ \frac{dQ_2}{d\rho}(0, t) + \bar{u}_1(x_0) + x_1 \bar{u}'_0(x_0) &= 0 \\ Q_2(\pm\infty, t) &= 0 \end{aligned}$$

Коэффициент разложения правой части Qf_2 представим в виде

$$Qf_2 = \tilde{f}(\rho)Q_2(\rho, t) + \{\dots\},$$

Выражение, обозначенное $\{...\}$, слишком громоздко, чтобы выписывать его в явном виде, важно подчеркнуть, что оно не зависит от Q_2 .

Итак, асимптотическое приближение в нулевом и первом приближениях имеет вид:

$$v_0 = \frac{\int \tilde{f}_x Q'_0(\rho) \rho d\rho}{\int (Q'_0(\rho))^2 d\rho}$$

$$v_1 = x_1 \frac{\int \left(\frac{d^2}{dx_0^2} \tilde{f}(\rho) \right) Q'_0(\rho) \rho d\rho}{\int (Q'_0(\rho))^2 d\rho} + \frac{\int b_1(\rho, t) Q'_0(\rho) \rho d\rho}{\int (Q'_0(\rho))^2 d\rho}$$

Таким образом, был изучен закон движения контрастной структуры типа всплеска.

Литература

1. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Об асимптотике решения типа контрастной структуры, Математические заметки, т. 42, в. 6, 1987
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г., Дифференциальные уравнения, Москва, «Наука», 1980
3. N.N. Nefedov, Spike type contrast structures in reaction-diffusion systems, Fundamental and Appl. Math., 2005

**Исследование спектральной задачи в волноводе с киральным заполнением
методом конечных элементов.****Ткач Е.**

Студент

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,**физический факультет, Москва, Россия**E-mail: eugenweaver@mail.ru*

В работе осуществляется расчет трехмерного волновода прямоугольного сечения с киральным заполнением и идеально проводящими стенками. Киральные среды представляют собой частный случай би-изотропных сред, материальные уравнения в которых имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= a_{11}\vec{E} + a_{12}\vec{H}, \\ \vec{B} &= a_{21}\vec{E} + a_{22}\vec{H}.\end{aligned}$$

Подобные среды обладают рядом замечательных свойств, позволяющих создавать на их основе уникальные приборы и устройства. Искусственную киральность можно создать, помещая в диэлектрическую среду проводящие объекты зеркально-ассиметричной формы достаточно малого по сравнению с длиной волны размера.

Для математического моделирования волноведущих систем одним из наиболее эффективных методов является метод конечных элементов [2], позволяющий рассчитывать волноведущие системы со сложной геометрией сечения и слоистыми заполнениями. Однако использование лагранжевых конечных элементов приводит к появлению нефизических решений, так называемых “духов”. Существует два способа борьбы с “духами”: апостериорный и априорный. В апостериорном методе “духи” отсеиваются после окончания процесса вычислений. Этот метод крайне трудоемкий и неэффективный. В априорных методах используются такие постановки исходной задачи и применяются такие численные методы, при которых “духи” не возникают. Весьма популярным является метод использования смешанных конечных элементов [3], который более трудоемкий, чем метод лагранжевых конечных элементов.

В настоящей работе предложена обобщенная постановка исходной задачи, которая препятствует появлению “духов” в методе конечных элементов Лагранжа:

$$\begin{aligned}&\iint_S \left\{ E_x^1 E_x^{*1} + E_y^1 E_y^{*1} + E_x^2 E_x^{*2} + E_y^2 E_y^{*2} + E_x^3 E_x^{*3} + E_y^3 E_y^{*3} \right\} dx dy + \\ &+ \iint_S \left\{ -E_x^2 E_y^{*1} + E_y^2 E_x^{*1} - E_y^1 E_x^{*2} + E_x^1 E_y^{*2} \right\} dx dy + \gamma^2 \iint_S (\vec{E}, \vec{E}^*) dx dy =\end{aligned}$$

$$= \gamma k (a_{21} - a_{12}) \iint_S \{ E^2 E^{*1} - E^1 E^{*2} \} dx dy +$$

$$+ ik (a_{21} - a_{12}) \iint_S \{ E_y^3 E^{*1} - E_x^3 E^{*2} + (E_x^2 - E_y^1) E^{*3} \} dx dy + k^2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \iint_S (\vec{E}, \vec{E}^*) dx dy,$$

где $\vec{E} \cdot e^{iyz} = \{ E^1(x, y), E^2(x, y), E^3(x, y) \} \cdot e^{iyz}$ – искомый вектор электрического поля, а $\vec{E}^* = \{ E^{*1}(x, y), E^{*2}(x, y), E^{*3}(x, y) \}$ – любая функция из пространства $H^1(S)$, где S – поперечное сечение волновода.

На основе предложенной постановки задачи разработан эффективный алгоритм, написана программа и проведен счет, демонстрирующий отсутствие “духов”.

Литература.

1. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. Математические модели киральных волноводов// Математическое моделирование. 2007. **19**, № 5. С. 3-24.
2. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. Москва “Наука”, главная редакция физико-математической литературы, 1981.
3. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А. Расчет постоянной распространения прямоугольного кирального волновода методом смешанных конечных элементов//Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2007. № 3. С. 22-24.

**Математическая обработка изображений малоплотных металлов
с рентгеновского томографа SkyScan 1074****(на примере определения характеристик слоев из наночастиц Bi).****Борисенко Л.А.¹, Маликова А.С.¹, Орехов А.С.²**¹Студенты*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия*²Аспирант*Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия**E-mail: borisenko.lidiya@physics.msu.ru**malikova.anastasiya@physics.msu.ru**orekhov@sci.lebedev.ru*

Малоплотные твердые вещества в виде аэрогелей или металлических слоев из наночастиц могут иметь удельную плотность, на порядки отличающуюся от плотности сплошного материала. Характерные величины плотностей рассматриваемых в данной работе веществ составляют 1/100-1/1000 от плотности сплошного полимера или металла. Равномерно распределенная в пространстве трехмерная сетка при этом имеет структурные элементы, близкие к наноразмерной области [2], так что неразрушающие методы для измерений таких объектов в значительной степени не разработаны и трудны [1,3].

Определение их параметров и структуры (толщины слоя, плотности и погонной массы) представляет собой нетривиальную задачу. Измерения осуществляются на пределе возможностей приборов и не обеспечены стандартными процедурами восстановления параметров таких веществ со стороны математического обеспечения фирменных приборов. Стоявшая перед нами задача заключалась в нахождении способа измерения толщины и плотности слоев, полученных при осаждении аэрозолей («смога» из наночастиц) на поверхность подложки с использованием математических методов обработки имеющихся данных. Слои из рассматриваемых частиц (диаметр много меньше длины волны видимого излучения) являются оптически непрозрачными (черными). В данной работе восстановление указанных параметров велось по двумерному изображению с рентгеновского томографа SkyScan 1074, регистрирующего металлический слой с плотностью около 1/50-1/400 плотности сплошного металла.

Слои из наночастиц висмута (Bi) осаждались в разреженной атмосфере аргона (~10-30 тор) на полимерные пленки из нитрата целлюлозы (толщина около 0.2 мкм). Для измерения погонной массы (массы на единицу площади в г/см²) применялась рентгеновская микрорадиография (сравнение по потемнению снимков образца с томографа с эталонным). Были изготовлены эталоны – слои сплошного висмута толщиной 1, 2 и 3 мкм. На кривой зависимости ослабления

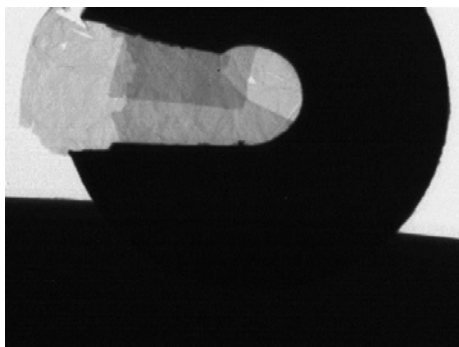


Рис.1 Эталонный образец Bi с различными толщинами.

интенсивности рентгеновского излучения от толщины сплошного висмута ставилась точка, соответствующая ослаблению рентгеновского излучения в слое малоплотного образца. Это позволяет получить искомую погонную массу ($d \cdot \rho_x$, где d – толщина образца, ρ_x – его плотность).

Для определения толщины слоя и эффективной плотности использовался метод «свидетелей»: в установке изготовления рядом с основными образцами помещались графитовые стержни диаметром 300 мкм и 500 мкм. Слой металлических наночастиц, имеющий форму шляпки гриба, осаждался на вершину стержней и контролировался на рентгеновском томографе.

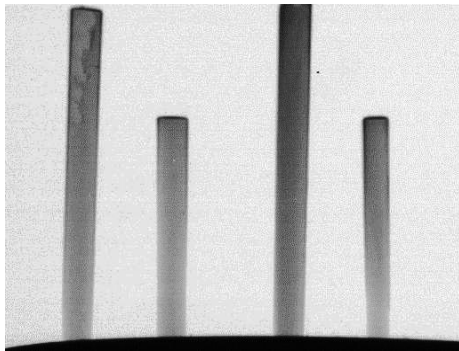


Рис.2 «Свидетели» с висмутом.

Далее производился расчет эффективной плотности $\rho_{эф}$:

$$I - Id = (I_w - Id) \cdot \exp(-\mu \cdot x),$$

I_w – интенсивность без образца; Id – фон;

μ – показатель поглощения сплошного металла;

ρ – плотность сплошного металла;

I – интенсивность прошедшего образца излучения

$$\rho_{эф} = \frac{\rho}{\mu \cdot x} \ln \left(\frac{I_w - Id}{I - Id} \right).$$

Использовалась часть изображения «свидетеля» размером 100·400 пикселей (1 пиксель соответствует 13.6 мкм). Этот кадр представлялся в виде числовой матрицы в которой строки несли информацию о толщине и плотности слоя («шапки»).

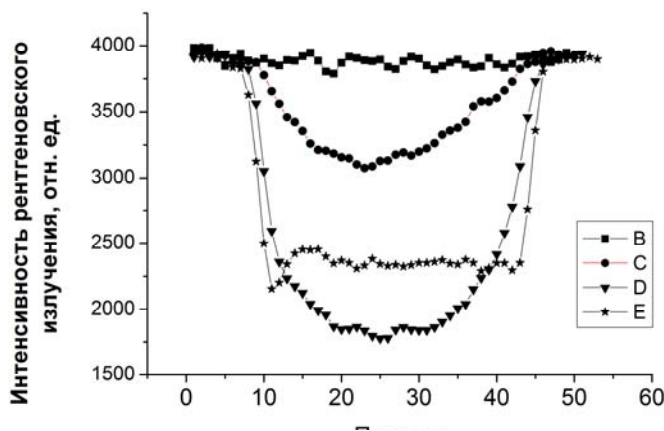


Рис.3 Поглощение рентгеновского излучения в «шляпке» «свидетеля».

B – граничный поверхностный слой

C – пропись через среднюю часть «шапки»

В работе показана непригодность фирменного математического обеспечения стандартного прибора для количественного решения поставленной задачи. Предложен алгоритм математической обработки изображения, позволяющий восстановить параметры материала, неопределимые стандартными методами. Написана программа, позволившая реализовать предложенный алгоритм обработки изображения. Экспериментально подтверждена правильность и корректность указанных процедур математической обработки

изображений на специально созданных объектах цилиндрической формы.

1. И.А. Артюков, Н.Г. Борисенко, А.В. Виноградов, Ю.С. Касьянов, В.Г. Пименов, Р.М. Фещенко, А.М. Халенков. Контроль параметров лазерных мишеней с помощью мягкого рентгеновского излучения. // Краткие сообщения по физике, ФИАН, 2006, №4, с. 45-51
2. N.G. Borisenko, I.V. Akimova, A.I. Gromov, A.M. Khalenikov, V.N. Kondrashov, J. Limpouch, E. Krousky, J. Kuba, K. Masek, Yu.A. Merkuliev, W. Nazarov, V.G. Pimenov. Regular 3-D

networks with clusters for controlled energy transport studies in laser plasma near critical density. // Fusion Sciences and Technology, 2006, V. 49, #4, pp. 676-685.

3. N.G. Borisenko, I.V. Akimova, A.I. Gromov, A.M. Khalenkov, Yu.A. Merkuliev, V.N. Kondrashov, J. Limpouch, V.G.Pimenov, The influence of underdense polymer target with/without high-Z nanoparticles on laser radiation absorption and energy transport. // Journal de Physique IV (France), June 2006, Vol. 133, pp. 305-308.

**Решение и исследование решения уравнения с адвективным членом с помощью
асимптотических методов.**

Саранцева Таисия Анатольевна.

Студент.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова.

Физический факультет.

E-mail: tsarantseva@mail.ru.

В работе рассматривалось уравнение с адвективным членом $\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon^2 a(u, x) \frac{du}{dx} = F(u, x)$, где ε - малый параметр, $x \in (0,1)$. Для его решения применялись методы асимптотической теории возмущений. Были построены асимптотики регулярной и погранслошной частей решения, построены верхнее и нижнее решения, произведено исследование решения на фазовой плоскости. Также рассматривался случай, когда в асимптотике решения появляется внутренний слой, возникает контрастная структура и необходимо искать точку перехода решения. Здесь возникает возможность исследования критического случая, когда один из коэффициентов разложения точки перехода тождественно равен нулю, тогда необходимо искать коэффициенты в уравнениях более высоких порядков. Этот случай также был рассмотрен в работе.

Данная задача очень перспективная и предоставляет большие возможности для исследования. Также она имеет большое практическое применение, описывает некоторые физические процессы.

Литература.

1. А.Б. Васильева. Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач (спекурс для аспирантов) Москва, 2005 г.

Задача рассеяния в квантовом волноводе с эффектом Рашба

Адо Иван Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

физический факультет, Москва, Россия

E-mail: ado@matematika.phys.msu.ru, _hammer2000_@mail.ru

Физика наномасштабов – предмет научного интереса уже довольно давно. Тем не менее, строгое математическое описание соответствующих вопросов зачастую не сделано. В настоящей работе рассматривается спиновый волновод с проявляющимся в ограниченной области пространства эффектом спин-орбитального взаимодействия Рашба. Доказано существование волновых операторов и (нестационарного) оператора рассеяния. Показана связь со стационарным подходом.

Экспонента оператора эволюции рассматриваемой квантовой системы, умноженного на t (параметр), совпадает с матрицей Грина соответствующей параболической системы дифференциальных уравнений. Для «включенного» эффекта Рашба матрица Грина строится как решение интегрального уравнения. С использованием метода последовательных приближений для нее получается оценка сверху, позволяющая доказать ядерность разности экспонент от операторов эволюции (свободного и с эффектом Рашба). На основе теоремы Като и принципа инвариантности волновых операторов делается заключение о существовании волновых операторов и оператора рассеяния.

Математическое моделирование электромагнитного поля в ближней зоне зеркального коллиматора

Хлебников Ф.Б.

Студент

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия*

E-mail: iwaagh@gmail.com

Важной задачей экспериментальной электродинамики является получение в заданном объеме (рабочей зоне) плоской электромагнитной волны. Для этой цели часто используют коллиматоры - установки, состоящие из рефлектора в форме параболоида и облучателя. Для реальных измерительных установок рефлекторы делают составными из нескольких отражающих пластин, так как изготовить зеркало параболической формы с достаточной степенью точности и одновременно больших размеров технически сложно.

Дифракция на ребрах пластин и отклонение формы поверхности зеркала от параболической приводят к тому, что поле в рабочей зоне отличается от поля плоской волны.

Целью работы является создание математической модели большого коллиматора с поперечными размерами 30-300 длин волн для учета влияния этих факторов.

Принимая во внимание, что поперечные размеры рефлектора во много раз превышают длину волны, и рассматривается излучение вперед, для расчета был выбран метод зеркальных токов [2]. Созданная математическая модель позволяет исследовать основную компоненту поля совпадающей поляризации в рабочей зоне коллиматора в зависимости от формы контура зеркала и учитывать отклонение поверхности рефлектора от параболической. Кроме того, предложенная модель позволяет рассчитывать паразитную ортогональную компоненту поля (кросскомпоненту).

Представлены численные расчеты амплитуды и фазы магнитного поля для рефлектора в виде вырезки из параболоида с прямоугольной границей для различных размеров прямоугольника и фокусных расстояний. Проведено сравнение результатов расчетов с результатами, полученными с помощью программы FEKO.

Литература

1. Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, В.С. Солосин. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов и параметров антенн. – М.: Наука, 2003.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Сов.Радио, 1957.

Разработка новых подходов к синтезу неформальной аксиоматической теории для конкретной, но произвольной предметной области.

Постановка задачи.

Побегайло П.А.

Инженер, к.т.н.

НПО «ТЕХНОКОН», Москва, Россия

petrp214@yandex.ru

В нашей работе [7] обсуждается вопрос о совершенствовании методологии создания профессионально ориентированного программного обеспечения. Так же там нами немного затрагивается вопрос и о разработке единой методологии синтеза сложных технических систем.

В качестве возможного, результативного и удобного приёма нами в указанной работе предложено пользоваться аксиоматическим методом. Речь конечно же идет о его неформальной разновидности, позволяющей не учитывать теорему Гёделя о неполноте [8 и др.].

Не смотря на известные его ограничения [6 и др.] данный метод позволяет создать крепкий фундамент для дальнейшего развития теории для конкретной, предметной области. Выявить лакуны в знании и оценить, что уже сделано и на каком уровне в рассматриваемой области. Помогает наметить пути для дальнейших исследований. Это сильно помогает и при создании программного обеспечения для конкретной предметной области.

Естественно, что применение и/или синтез неформальной аксиоматической теории (НАТ) вызывает определенные вопросы и трудности, которые необходимо решать и преодолевать.

В рамках настоящей работы остановимся на рассмотрении некоторых вопросов синтеза НАТ для произвольной, но четко очерченной предметной области.

Очевидно, что при выполнении такого рода исследований возможны различные взгляды, мнения и идеи. Кроме того, фронт такого рода исследований весьма широк и многогранен. Сузим этот фронт. А именно, сейчас остановимся на адаптации, некоторой переделке методов из работ [3, 4] предложенных первоначально для создания программ.

Из работ [3, 4] следует, что при создании программ рекомендуется опираться на следующие понятия:

- повторное использование;
- изменяемость;

- поэтапная разработка.

Кроме этого, в этих работах можно найти рассмотрение таких «сущностей», как:

- синтез «вширь»;

- многомерная структура программы и пр.

Творческая переработка указанных понятий, при соблюдении известных требований к математической строгости НАТ [8 и др.], позволяет получить первичный механизм синтеза НАТ для произвольной предметной области. О различных нюансах такой переработки мы расскажем в ходе нашего устного доклада, который, напомним, будет носить постановочный характер, так как круг нерешенных (и даже неосознанных) вопросов еще очень велик.

Работая над очерченным выше кругом задач, мы неизбежно сталкиваемся и с вопросами философии, методологии (как науки) и логики.

Философия указывает нам на целесообразность применения при решении наших задач теории функциональных систем [2, 6 и др.]. Для этого необходимо четко выделить в предметной области необходимые для этого понятия. Одно из главнейших понятий при этом – это так называемый системообразующий фактор.

По всей видимости, НАТ конкретной предметной области и теория функциональных систем внутренне взаимосвязаны: они образуют диалектическое единство, обеспечивающее развитие.

Говоря иными словами, развивая НАТ, мы получаем возможность сформулировать необходимые положения (прикладные) теории функциональных систем. И наоборот.

Методология как наука даёт нам так называемый деятельностный подход [5 и др.]. Его можно использовать при дальнейшем развитии наших взглядов и идей.

Логика же указывает нам (кроме того, что она и является основой доказательств в конкретной НАТ) на возможную альтернативу для аксиоматического метода – на генетический метод [1 и др.]. В перспективе мы обязательно рассмотрим целесообразность его применения в наших задачах.

Таким образом, в рамках настоящей работы, нами, в первую очередь, намечены пути дальнейших исследований. А во вторую очередь предложено применять идеи работ [3, 4] к более широкому кругу задач, выходящих за пределы создания программного обеспечения.

Литература

1. Анисов А.М. Аксиоматические и генетические теории // Владимир Александрович Смирнов. Под ред. В.Л. Васюкова. / М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН), 2010. с. 155 – 201.
2. Анохин П.К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем // Принципы системной организации функций. М.: Наука, 1973. с. 5 – 61.
3. Горбунов-Посадов М.М. Расширяемые программы. М.: Полиптих, 1999.

4. Горбунов-Посадов М.М. Безболезненное развитие программы // Робототехника, прогноз, программирование. Под ред. Г.Г. Малинецкого / М.: Издательство ЛКИ, 2008. с. 190 – 199.
5. Данилова В.Л. Концепция знания в работах Г.П. Щедровицкого: на пути к новому синтезу // Георгий Петрович Щедровицкий. Под ред. П.Г. Щедровицкого и В.Л. Даниловой. / М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН), 2010. с. 261 – 318.
6. Илларионов С.В. Теория познания и философия науки. М.: «Российская политическая энциклопедия» (РОССПЭН), 2007.
7. Побегайло П.А. К вопросу о совершенствовании методологии создания профессионально ориентированного программного обеспечения // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2010». Секция Физика. Подсекция Математики и информатики / МГУ имени М.В. Ломоносова. М., 2010.
8. Успенский В.А. Что такое аксиоматический метод? Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.