Секция «Математика и механика»

Применение базисных функций в задачах прочности тел вращения из композиционных материалов

Бреховских Павел Валентинович
Студент
Казанский государственный технический университет им. А.Н.Туполева, Институт авиации,наземного транспорта и энэргетики, Казань, Россия
E-mail: pav-89@mail.ru

Одна из наиболее перспективных областей применения композиционных материалов (КМ) в силовых конструкциях связана с тонкостенными стержнями, которые изготавливаются намоткой или выкладкой однонаправленной или тканой ленты под различными углами к продольной оси стержня. Их используют в качестве элементов ферм, подкосов, лонжеронов, винтов летательных аппаратов, карданных валов автомобилей и т.д. [3].Решение рассматриваемой ниже задачи можно использовать в экспериментальных исследованиях при оценках прочности при кручении композитных стержней и балок.

Рассмотрим упругое тело вращения длиной l, обладающее цилиндрической анизотропией с осью анизотропии, совпадающей с осью вращения z. Стержень закручивается усилиями, приложенными к его торцам. Эти усилия приводят к скручивающему стержень моменту. Объемными силами пренебрегаем. Исходная система уравнений, описывающая данное состояние тонкостенного элемента приведена в работе С.Г.Лехницкого [2]. Существует два основных способа решения задачи о кручении, в зависимости от того, что принимается за основную функцию, определяющую напряжения или перемещения. Рассмотрим первый подход, в котором за основную функцию принимается функция напряжений Ψ(r,z). Задача сводится к отысканию этой функции в области половины меридионального сечения, т.е. ограниченного осью z, двумя прямолинейными отрезками, нормальными к оси z (торцы) и образующей. Если имеется сквозная соосная полость, то половина меридионального сечения ограничена двумя прямолинейными отрезками и двумя кривыми. Когда на по боковой поверхности распределены усилия τ_n , касательные к контуру поперечного сечения и не меняющиеся вдоль этого контура, то для функции напряжений имеем условие

$$\Psi(r,z) = -\int \tau_n r^2 ds + c \tag{1}$$

Если усилия на боковой поверхности не заданы, а известна только величина скручивающих моментов (реакций) на концах $M =$ M1, то в этом случае условие (1) упрощается и функция напряжений Y на меридиане принимает постоянное значение.

Рассматривая равновесие части стержня, ограниченной произвольным поперечным сечением, получим, что

$$\Psi(R,z) - \Psi(R_0,z) = \frac{M}{2\pi}. \tag{2}$$

Здесь R — наружный радиус тела на расстоянии z от торца; R_0- радиус соосной полости (или 0 в случае сплошного тела) на этом же расстоянии.

В случае трансверсально-изотропного тела функция напряжений Y должна удовлетворять дифференциальному уравнению[2]:

$$\Psi_{rr} + g\Psi_{zz} - \frac{3}{r}\Psi_r = 0, \tag{3}$$

где $g^2 = \frac{G_{\theta z}}{G_{r\theta}}$, а Ψ_{rr}, Ψ_r и Ψ_{zz} — производные по r (2-я и 1-я) и z.

В случае изотропного тела $g = 1$. Решение задачи о кручении трансверсально-изотропного стержня с областью S можно свести к решению аналогичной задачи для изотропного стержня, но с измененной областью S_1, путем простой замены переменных $r_1 = r$, $z_1 = \frac{z}{\sqrt{g}}$.

Воспользовавшись методикой построения базисных (в нашем случае полиномиального вида) функций на основе разложения инвариантных решений рассматриваемых дифференциальных уравнений в частных производных [1] получим решение уравнения при помощи базисных функций:

$$\Psi(r_1, z_1) = A_0 + A_1 z_1 + A_2(r_1^2 + 2z_1^2) + A_3(r_1^2 z_1 + \frac{2}{3}z_1^3) + A_4 r_1^4 + \\ + A_5 r_1^4 z_1 + A_6(r_1^6 - 6r_1^4 z_1^2) + \ldots + A_N U_N(r_1, z_1), \tag{4}$$

где $U_i(r_1, z_1)$ — базисные функции.

После определения в преобразованной области функции напряжения, возникающие в рассматриваемом трансверсально-изотропном стержне, находятся по формулам [2].

Произвольные коэффициенты , входящие в решение подлежат определению. Их количество зависит от выбора метода решения граничной задачи. Коэффициенты разложения , обеспечивающие наилучшую аппроксимацию граничных условий найдем с помощью метода взвешенных невязок или метода коллокаций.

Процедура, описанная в работе по нахождению полиномиальных решений по рекуррентной формуле, дает достаточно простой алгоритм для последовательного построения полиномиальных решений любой степени а. Квадратурные формулы, введенные в компьютер, обеспечивают большую скорость практических расчетов, что важно при решении задач многоцелевой оптимизации. Полученные результаты могут использоваться в задачах параметрической идентификации и обратных задачах, например, уточнения физико-механических параметров, определяющих коэффициенты математических моделей на основе прочностного эксперимента.

Литература

1. Дружинин Г.В., Закиров И.М., Бодунов Н.М. Базисные функции в приближенных решениях краевых задач. Казань: Изд-во «Фен», 2000. 376 с.

2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.

3. Мэттьюз Р., Ролингс Р. Композиционные материалы. Механика и технология. М.: Техносфера, 2004. 408 с.