Секция «Математика и механика»

О неравенстве для фрактального броуновского движения

Муравлёв Алексей Анатольевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: almurav@gmail.com

Рассмотрим фрактальное броуновское движение $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$, т.е. выходящий из нуля гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s,t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

где $t, s \geq 0$. Основной результат состоит в следующем.

Теорема 1. В слачае $0 < \frac{1}{2}$ для любого момента τ, измеримого относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}^{B^H} = (\mathcal{F}_t^{B^H})_{t\geq 0}$, с $\mathbf{E}\tau < \infty$ справедливо следующее неравенство:

$$-k_H(\mathbf{E}\tau)^H \leq \mathbf{E}B_\tau^H \leq k_H(\mathbf{E}\tau)^H,$$

где

$$k_H = \frac{[(2\pi)^{-H}\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)]^{1/2}}{\mathrm{B}(\frac{1}{2}+H, \frac{1}{2}-H)H\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u) \left[\int_{-\infty}^{u} \Phi^2(v)e^{v^2/2}dv\right]^{-H} du.$$

Основные результаты, связанная с неравенствами для B_t^H изложены в [1], [2]. Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет следующий факт.

Теорема 2. В слачае $0 < \frac{1}{2}$ для фрактального броуновского движения справедливо следующее представление:

$$B_t^H = \frac{c_H}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)} \int_0^\infty \beta^{-1/2-H}(Z_t^\beta - \xi_\beta)d\beta,$$

где

$$c_H = \frac{[\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)]^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})},$$

а Z_t^β — семейство процессов Орнштейна-Уленбека со стационарным начальным распределением:

$$Z_t^\beta = \int_0^t e^{-\beta(t-s)}dB_s + e^{-\beta t}\xi_\beta, \quad \xi_\beta = \int_{-\infty}^0 e^{\beta s}dB_s.$$

Литература

1. Novikov A., Valkeila E., On some maximal inequlities for fractional Brownian motions. Preprint 186, University of Helsinki (1998)

2. Mishura Yu., Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes, Springer (2008)