Секция «Математика и механика»

Об одном классе функционалов, обладающих экспоненциальным ростом с полиномиальным показателем, интегрируемых по мере Фейнмана

Кравцева Анна Константиновна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: anna-conf@yandex.ru

В работе доказывается существование интегралов вида

$$\int\limits_H f(Cx)e^{-(p(Cx))^{2l}}e^{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax,Ax)}dx.$$

Здесь H - гильбертово пространство, T - симметричный положительно-определённый ядерный оператор. Пусть $p(x) = Q_{2l}(x,\ldots,x)^{\frac{1}{2l}}$, где $Q_{2l} : H \times \ldots \times H \to \Re$ - линейное, непрерывное по каждому аргументу, симметричное и положительно-определённое, при этом $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in H$. Функционал $f \in F(H)$, где $F(H) = \{f : H \to \mathbb{C}$, т.ч. существует продолжение $\widetilde{f} : H^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, являющееся аналитической функцией относительно сильной топологии пространства $H^{\mathbb{C}}$, и $\exists\ C_{1,2} > 0$ и $\varepsilon > 0 : |f(x)| \le C_1 e^{C_2(p(x))^{2l-\varepsilon}} \forall x \in H\}$, A и C - линейные, ограниченные, обратимые операторы на $H^{\mathbb{C}}$. Пусть $Re(T^{-1}AC^{-1}Sx, x) \ge 0$ и $Re(AC^{-1}x, x) \ge 0$ $\forall x \in H$, где оператор S зависит от степени полинома $2l$.Тогда существует фейнмановский интеграл: $\int\limits_H \widetilde{f}(Cx)e^{-(p(Cx))^{2l}}e^{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax,Ax)}dx$, и он равен гауссовскому интегралу $\int\limits_H \widetilde{f}(CUx + \omega\frac{\|x\|^2}{(p(CBSx))^2}\ CBSx)\ J_1(x)J_2(x)\ e^{-(p(CUx+\omega\frac{\|x\|^2}{(p(CBSx))^2}CBSx))^{2l}}\ e^{-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\|x\|^4}{(p(CBSx))^4}(T^{-1}ABSx,ABSx)}$ $e^{-\omega\frac{\|x\|^2}{(p(CBSx))^2}(T^{-1}ABSx,AUx)}\ e^{-\frac{1}{2}(T^{-1}AUx,AUx)}dx$ для некоторых операторов U, B и константы ω. Подынтегральная функция содержит аналитическое продолжение вещественного скалярного произведения. Здесь $J_1(x) = det(I+\frac{\omega\|x\|^2}{(p(Sx))^2}U^{-1}BS)$, $J_2(x) = 1+2\omega\frac{(x,A_0(x))}{(p(CBSx))^2} - 2\frac{\omega\|x\|^2}{(p(CBSx))^{2l+2}}q_{2l}(CBSA_0(x), CBSx, \ldots, CBSx)$, $A_0(x) = \left(I + \frac{\omega\|x\|^2}{(p(CBSx))^2}U^{-1}BS\right)^{-1}U^{-1}BSx$. В работе расширен класс операторов, от которых зависит исходная подынтегральная функция, по сравнению с предшествующим результатом автора [2]. Статья [1] содержит теорему для случая, когда вместо операторов рассматриваются комплексные числа.

Литература

1. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Формулы Фейнмана для решений бесконечномерных уравнений Шрёдингера с полиномиальными потенциалами. Доклады Академии наук, №3, том 390, 2003, с. 321-324.

2. http://lomonosov-msu.ru, 2010.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность профессору, д.ф.-м.н. Шавгулидзе Е.Т. за обсуждение работы и полезные рекомендации.