## Секция «Математика и механика»

# О неразрешимости проблем полноты и А-полноты для автоматных функций

***Жук Дмитрий Николаевич***

*Кандидат наук*

*Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, Мех-Мат, Москва, E-mail: zh_dmitriy@mail.ru*

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots, \}$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $P_k$ — множество всех функций $k$-значной логики. Будем рассматривать автоматные функции с входным и выходным алфавитом $E_k$. В работах [1],[2] установлена алгоритмическая неразрешимость задач о полноте и А-полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. В работах [3],[4] показано, что проблемы полноты и А-полноты алгоритмически разрешимы для систем автоматных функций вида $P_k \cup \nu$, где $\nu$ — конечная система автоматных функций.

Таким образом имеет смысл рассматривать задачи о полноте и А-полноте для системы вида $F \cup \nu$, где $F$ — фиксированный замкнутый класс $k$-значной логики, а $\nu$ — конечная система автоматных функций. Сформулируем строго две массовые задачи. Пусть $F$ — замкнутый класс $k$-значной логики.

ПОЛНОТА($F$): дана конечная система $\nu$ автоматных функций; требуется установить, полна ли система $F \cup \nu$.

А-ПОЛНОТА($F$): дана конечная система $\nu$ автоматных функций; требуется установить, $A$-полна ли система $F \cup \nu$.

В случае, если $k = 2$ важные результаты были получены Д.Н.Бабиным: ему удалось разделить все классы Поста $F$ на те, для которых задачи ПОЛНОТА($F$) и А-ПОЛНОТА($F$) алгоритмически разрешимы, и те для которых эти задачи неразрешимы [5].

В случае $k \geq 3$ некоторые результаты были также получены Д.Н.Бабиным. Он показал, что задачи ПОЛНОТА($F$) и А-ПОЛНОТА($F$) алгоритмически неразрешимы, если $F$ — класс Слупецкого, и алгоритмически разрешимы, если $F$ — класс функций, сохраняющих все константы [6].

В данной работе предлагается одно условие неразрешимости задач ПОЛНОТА($F$) и А-ПОЛНОТА($F$). Автору не известны случаи, когда задачи ПОЛНОТА($F$) и А-ПОЛНОТА($F$) неразрешимы, а класс $F$ при этом не удовлетворяет приводимому условию.

Говорим, что предикат $\rho$ обладает 3-свойством если существуют $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$, слова $\alpha_1, \beta_1 \in E_k^{m_1}$, $\alpha_2, \beta_2 \in E_k^{m_2}$, $\alpha_3, \beta_3 \in E_k^{m_3}$, такие что выполняются следующие условия:

1) Пусть $\gamma_1 \in \{\alpha_1, \beta_1\}$, $\gamma_2 \in \{\alpha_2, \beta_2\}$, $\gamma_3 \in \{\alpha_3, \beta_3\}$, тогда

$$\rho(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = 0 \Longleftrightarrow \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3;$$

2) $\forall \gamma_3 \in E_k^{m_3-1}, \exists a \in E_k, \forall \gamma_1 \in E_k^{m_1}, \forall \gamma_2 \in E_k^{m_2}\ \rho(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 a) = 1.$

**ТЕОРЕМА.** *Если все функции из $F \subseteq P_k$ сохраняют предикат $\rho$ обладающий 3-свойством, тогда задачи ПОЛНОТА(F) и А-ПОЛНОТА(F) алгоритмически неразрешимы.*

## Литература

1. Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. Москва, ДАН СССР, 1964, т. 155.

2. Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания $A$-полноты для о.д.-функций // Математический заметки. Т. 12, №6. 1972. С. 687-697.

3. Буевич В. А. Условия $A$-полноты для автоматов. М.: Изд-во МГУ, 1986.

4. Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. Москва, Дискретная математика, 1992. Т. 4, вып. 4. С. 41-56.

5. Бабин Д. Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // Доклады Академии наук. №4. Т. 367. 1999. С. 439-441.

6. Бабин Д. Н. О классификации базисов в $P_k$ по разрешимости полноты для автоматов // Интеллектуальные системы, N 8, с.369-389.