Секция «Математика и механика»

Метод характеристик для детерминированных аналогов стохастических дифференциальных уравнений

Гапечкина Екатерина Викторовна
Аспирант
ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет, общенаучный факультет, Уфа, Россия
E-mail: gap_kate@mail.ru

Пусть $\overline{X}(s) = (X_1(s), \ldots, X_d(s))$, $s \in [0,T]$, – произвольная непрерывная вектор-функция, каждая из координат которой имеет неограниченную вариацию. Рассмотрим задачу Коши для ДУЧП первого порядка с многомерным симметричным интегралом:

$$\begin{gathered} d_t u(t,\bar{x},\overline{X}(t)) = -\sum_{i=1}^{n} B^i(t,\bar{x},\overline{X}(t)) u'_{x_i}(t,\bar{x},\overline{X}(t))dt- \\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t,\bar{x},\overline{X}(t)) u'_{x_i}(t,\bar{x},\overline{X}(t)) * dX_j(t), \quad u(0,\bar{x},\overline{X}(0)) = x_k, \end{gathered} \tag{1}$$

где x_k в начальном условии – k-тая координата переменной $\bar{x} \in R^n$.

Теорема 1. *Пусть* $\forall \bar{x} \in R^n$ *функции* $B^i(t,\bar{x},\overline{X}(t))$, $\sigma^{ij}(t,\bar{x},\overline{X}(t))$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,d$, *измеримы по* t, *ограничены вместе со своими производными по* $\bar{x}$ *1 и 2 порядка и такие, что интегралы в правой части уравнений системы (2) существуют. Пусть* $u_k(t,\bar{x}) = u_k(t,\bar{x},\overline{X}(t))$ *– решения задачи Коши (1) для каждого начального условия* x_k, $k = 1,2,\ldots,n$, $\overline{U}(t,\bar{x}) = (u_1(t,\bar{x}),\ldots,u_n(t,\bar{x}))$ *– процесс, составленный из этих решений. Тогда* $\forall t \in [0,T]$ *отображение* $\overline{U}(t,\cdot) : \bar{x} \in R^n \to \overline{U}(t,\bar{x}) \in R^n$ *является диффеоморфизмом класса* $C^1(R^n)$ R^n *в* R^n, *причем обратное отображение* $\overline{U}^{\,-1}(t,\bar{x})$ *является решением системы дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами:*

$$\begin{cases} \eta_i(t,\bar{x}) = x_i + \displaystyle\int_0^t B^i(s,\overline{\eta}(s,\bar{x}),\overline{X}(s))ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma^{ij}(s,\overline{\eta}(s,\bar{x}),\overline{X}(s)) * dX_j(s), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta_i(0,\bar{x}) = x_i, \quad i = 1,2,...,n. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $\overline{\eta}(t,\bar{x})$ *является решением системы уравнений (2). Тогда* $\overline{\eta}(t,\bar{x})$ *является характеристикой уравнения (1).*

Метод характеристик для решения ДУЧП с симметричными интегралами из теорем 1,2 является обобщением результата Крылова Н.В., Розовского Б.Л. (см. [2, п. 5.1]): вместо дифференциальных уравнений с интегралом Ито рассматриваются дифференциальные уравнения с симметричными интегралами (см. [1]), $\overline{\eta}(t,\bar{x})$ — решение системы (2), которое не является диффузионным процессом, а сам многомерный симметричный интеграл является обобщением стохастического интеграла Стратоновича.

Литература

1. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и стохастический анализ // Теория вероятностей и ее применение. 2006. Т.51, № 3. С.496–517.

2. Розовский Б.Л. Эволюционные стохастические системы. М., Наука, 1983. 208 с.