Секция «Математика и механика»

О предельных точках цепей и антицепей в компактификации Белла счётного дискретного пространства

Бастрыков Евгений Станиславович
Аспирант
Удмуртский государственный университет, Математический факультет, Ижевск, Россия
E-mail: vporoshok@gmail.com

Рассматривается расширение Белла [3] BN, построенное как пространство Стоуна булевой алгебры, определённой следующим обаразом. Пусть

$$P = \{f \in \omega^\omega : 0 \leq f(n) \leq n+1\},$$
$$N = \{f|_n : f \in P,\, n \in \omega\},$$
$$T = \{\pi \in N^\omega : \mathrm{dom}(\pi(n)) = n+1 \text{ для всякого } n \in \omega\}.$$

На множестве N можно естественным образом ввести отношение порядка: $t \geq s$ тогда и только тогда, когда t — продолжает s ($t|_{\mathrm{dom}\, s} = s$).

Для $s \in N$ и $\pi \in T$ определим

$$C_s = \{t \in N : t|_{\mathrm{dom}\, s} = s\}, \qquad C_\pi = \cup\{C_{\pi(n)} : n \in \omega\}.$$

Булева алгебра порождается семейством

$$B' = \{C_\pi : \pi \in T\} \cup \{N \setminus C_\pi : \pi \in T\}.$$

Обозначим

$$\mu = \{G = N \setminus (\bigcup_{i \leq k} C_{\pi_i})\}.]$$

В работе [4] было показано, что любая бесконечная цепь в N является сходящейся последовательностью в BN, а замыкание бесконечной антицепи из N в BN гомеоморфно пространству Стоуна–Чеха, βN. В данной работе описываются точки замыканий цепей и антицепей, как максимальные центрированные системы множеств в семействах подмножеств BN определённого вида.

Теорема [2]. Если $\xi = \{G\}$ — максимальная центрированная система множеств в семействе μ, то $|\cap\{G^* : G \in \xi\}| = 1$.

Такие точки назовём ℓ-точками.

Теорема [1]. Точка $x \in BN \setminus N$ — ℓ-точка тогда и только тогда, когда x — предел бесконечной цепи в N.

Антицепь вида $\pi(M) = \{\pi(n) : n \in M\}$ будем называть строгой, также обозначим $C_{\pi|M} = \{C_{\pi(n)} : n \in M\}$. Для характеризации предельных точек строгой бесконечной антицепи $\pi(M)$ дополним μ семейством

$$\theta_{\pi|M} = \left\{C_{\pi|M_i} : M_i = \{n \in M : n \geq i\}\right\}$$

и обозначим $\mu_{\pi|M} = \mu \cup \theta_{\pi|M}$.

Теорема. Пусть $\xi = \{G\}$ максимальная центрированная система в семействе $\mu_{\pi|M}$, такая что $\xi \supseteq \theta_{\pi|M}$, то $|\cap\{G^* : G \in \xi\}| = 1$.

Такие точки будем называть $\ell_{\pi|M}$-точками.

Теорема. Точка $x \in BN \backslash N$ — $\ell_{\pi|M}$-точка тогда и только тогда, когда x — предельная точка строгой бесконечной антицепи $\pi(M)$.

Для π, $\pi' \in T$ и M, $M' \subseteq \omega$ будем говорить, что $C_{\pi'|M'}$ вписано в $C_{\pi|M}$, если для всякого $n' \in M'$ найдётся $n \in M$ такое, что $\pi'(n') \geq \pi(n)$ и $n' > n$.

Теорема. Пусть $\pi(M)$ строгая бесконечная антицепь, тогда

$$[\pi(M)] = \cap\{[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ — вписано в } C_{\pi|M}\}.$$

Литература

1. Бастрыков Е. С. О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Т. 4. С. 3–6.

2. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 3. С. 10–17.

3. Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. Pp. 11–25.

4. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. 2010. Vol. 35. Pp. 177–185.