Секция «Математика и механика»

Строго положительные произведения неотрицательных матриц

Войнов Андрей Сергеевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: an.voynov@gmail.com

Предположим, задано конечное семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ размера $(d \times d)$; обозначим через $< \mathcal{A} >$ полугруппу по умножению, порожденную матрицами из $\mathcal{A}$, т.е. множество всевозможных произведений вида $A_{d_1} \cdots A_{d_m}$, $m \in \mathbf{N}$. Изучается следующая задача: при каких условиях на семейство $\mathcal{A}$, полугруппа $< \mathcal{A} >$ содержит хотя бы одну строго положительную матрицу (т.е. матрицу со всеми элементами строго большими нуля) ? Эта задача имеет множество приложений, например, при изучении показателей Ляпунова, в неоднородных Марковских процессах, при изучении уточняющих алгоритмов с неотрицательными коэффициентами и т.д. В работе находится полный критерий наличия положительной матрицы в полугруппе.

Легко видеть, что если положительная матрица существует, то семейство должно быть *неприводимым*, т.е. матрицы $A_1, \ldots, A_k$ не должны иметь общих инвариантных подпространств среди координатных плоскостей, т.е. среди подпространств вида $\{x \in \mathbf{R}^d \mid x_{i_1} = \ldots = x_{i_r} = 0\}$.

Теорема 1 *Предположим, семейство $\mathcal{A}$ неприводимо и его матрицы не имеют нулевых строк или столбцов; тогда полугруппа $< \mathcal{A} >$ не содержит положительной матрицы тогда и только тогда, когда найдется разбиение множества базисных векторов $\{e_1, \ldots, e_d\}$ на попарно непересекающиеся непустые подмножества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, $n \geq 2$ такие, что любая матрица A_i действует как перестановка этих множеств.*

Это означает, что для любого оператора $A_i \in \mathcal{A}$ существует перестановка σ множества $\{1, \ldots, n\}$ такая, что для любого базисного вектора $e_m \in \Omega_j$ его образ $A_i e_m$ принадлежит линейной оболочке $\Omega_{\sigma(j)}$.

Если семейство $\mathcal{A}$ состоит из одной матрицы A, то существование положительной матрицы в соответствующей полугруппе означает, что некоторая степень A положительна, т.е. матрица A примитивна. Существует множество хорошо известных условий примитивности таких, как условия в теореме Перрона-Фробениуса или теореме Романовского (неприводимая матрица A не примитивна, если существует разбиение множества базисных векторов на несколько равномощных множеств, на которых A действует как циклическая перестановка). Теорема 1 обобщает этот результат на произвольное семейство матриц. Отметим, что, в отличие от случая одной матрицы, множества разбиения $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ могут не быть равномощными и перестановки, определенные операторами A_i могут не быть циклическими. На основании Теоремы 1 строится алгоритм полиномиальной сложности определения существования положительной матрицы в полугруппе, порожденной k неотрицательными $(d \times d)$-матрицами. Алгоритм не только устанавливает существование, но также находит и разбиение $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$. Алгоритм имеет сложность kd^3.

Данная работа является совместной с В.Ю.Протасовым.