Секция «Математика и механика»

Классификация SL(3,C)-значных коциклов над эргодическими автоморфизмами.

Липатов Максим Евгеньевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: maxim.lipatov@gmail.com

Пусть T – эргодический, сохраняющий меру автоморфизм стандартного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Случайный элемент $A(\omega)$ со значениями в топологической группе G, снабженной борелевской σ-алгеброй, порождает случайную последовательность $A_n(\omega)$, $n \in \mathbb{Z}$, которая называется *G-коциклом* и задается формулами $A_n(\omega) = A(T^{n-1}\omega)\dots A(T\omega)A(\omega)$, $A_{-n}(\omega) = (A_n(T^{-n}\omega))^{-1}$ при $n > 0$, $A_0(\omega) = \mathrm{Id}$.

G-коциклы $A_n(\omega)$ и $B_n(\omega)$ называются *G-когомологичными*, если для некоторого случайного элемента $C\colon \Omega \to G$ имеем $B(\omega) = C^{-1}(T\omega)A(\omega)C(\omega)$ п.н., что равносильно условию $B_n(\omega) = C^{-1}(T^n\omega)A_n(\omega)C(\omega)$ п.н., $n \in \mathbb{Z}$.

В работе [1] доказывается, что для $G = GL(d, \mathbb{R})$ произвольный коцикл когомологичен коциклу блочно-треугольного вида с так называемыми блочно-конформными подкоциклами $D_n^{(k)}(\omega) = D^{(k)}(T^{n-1}\omega)\dots D^{(k)}(T\omega)D^{(k)}(\omega)$ на диагонали:

$$\begin{pmatrix} D_n^{(1)}(\omega) & * & * & * \\ 0 & D_n^{(2)}(\omega) & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & D_n^{(p)}(\omega) \end{pmatrix}, \; D^{(k)}(\omega) = \begin{pmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots \\ D^{(k)}_{\sigma(\omega)1,1}(\omega) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & D^{(k)}_{\sigma(\omega)l_k,l_k}(\omega) \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix},$$

где $D^{(k)}_{\sigma(\omega)i,i}(\omega) \in \{A \in GL(m_k, \mathbb{R}) | A^T A = c^2\mathrm{Id}, c > 0\}$ для всех $\omega \in \Omega$, $\sigma(\omega)$ – случайная перестановка из S_{l_k}, $\sum_{k=1}^{p} l_k m_k = d$.

Ранее в работах [2, 3] аналогичная редукция осуществлялась для групп $GL(2, \mathbb{R})$ и $SL(2, \mathbb{R})$ с использованием метода конформных барицентров. В докладе будет показано, как этот подход можно распространить на случай $G = SL(3, \mathbb{C})$. В зависимости от типа инвариантных эргодических мер для специальных расширений автоморфизма T получается тот или иной канонический вид коциклов, аналогичный вещественному случаю. Также использовались некоторые результаты теории симметрических пространств некомпактного типа.

Литература

1. Arnold L., Cong N. D., Oseledets V. I. Jordan normal form for linear cocycles // Random Oper. Stochastic Equations. 1999. V. 7. P. 303–358.

2. Oseledets V. I. Classification of GL(2,R)-valued cocycles of dynamical systems. Report Nr. 360. Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1995.

3. Thieullen Ph. Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices // Journal d'Analyse Mathématique. 1997. V. 73. P. 19–64.