

Секция «Математика и механика»

Меры, квазиинвариантные относительно действия группы диффеоморфизмов отрезка, и представления этой группы.

Досовицкий Алексей Алексеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: adosovitskiy@gmail.com

Построено семейств мер на некоторых специальных подмножествах множества кусочно- $C^1$ -гладких гомеоморфизмов отрезка и доказана их квазиинвариантность относительно действия композицией  $C^2$ -диффеоморфизмов отрезка. Ранее ([1]) было известно лишь о квазиинвариантности этих мер относительно действия  $C^3$ -диффеоморфизмов. Кроме того, построена серия представлений группы диффеоморфизмов отрезка в пространствах функций, квадратично интегрируемых по этим мерам. С использованием квазиинвариантности мер относительно  $C^2$ -диффеоморфизмов получено новое доказательство неприводимости этих представлений. Подробнее с результатами можно ознакомиться в [2]. Развиваются идеи работ Шавгулидзе [3] и Косяка [4], в которых изучались меры на множествах  $C^1$ -диффеоморфизмов отрезка и окружности. Также близкие вопросы рассматривались в работе Кузьмина [5].

Меры строятся на множествах  $F(t_1, \dots, t_r, l_1, \dots, l_r)$ , представляющих из себя множество кусочно- $C^1$ -гладких гомеоморфизмов отрезка  $[0, 1]$ , имеющих изломы в точках  $t_j$ , причем отношение правой производной к левой в этих точках равно  $e^{l_j}$ . Эти множества оказываются гомеоморфны множеству непрерывных на отрезке  $[0, 1]$  функций  $c(t)$ , таких, что  $c(0) = 0$ . Мера  $\mu_\sigma$  определяется как образ меры Винера  $W_\sigma$  с дисперсией  $\sigma$ . Ранее было получено выражение для плотности преобразованной меры относительно исходной при действии  $C^3$ -диффеоморфизмов. Удалось доказать, что квазиинвариантность имеет место и при действии менее гладких  $C^2$ -диффеоморфизмов.

Для каждого  $\lambda \in \mathbb{R}$  зададим унитарное представление  $U^{\sigma, \lambda}$  группы  $C^3$ -диффеоморфизмов отрезка в пространстве  $L_2(F, \mu_\sigma) \ni \Phi$  квадратично интегрируемых по мере  $\mu_\sigma$  комплекснозначных функций на  $F$  следующей формулой:

$$(U_g^{\sigma, \lambda} \Phi)(f) = (\rho_{g^{-1}}(f))^{\frac{1}{2} + \lambda i} \Phi(g^{-1} \circ f),$$

Где  $g$  — диффеоморфизм,  $i$  — мнимая единица. С помощью новых результатов о мерах получено доказательство неприводимости этих представлений. Кроме того, упрощено доказательство того факта, что все эти представления различны, т.е. если  $U_1^{\sigma_1, \lambda_1}$  и  $U_2^{\sigma_2, \lambda_2}$  — представления в пространствах  $L_2(F(t_1^1, \dots, t_{r_1}^1, l_1^1, \dots, l_{r_1}^1), \mu_{\sigma_1}^1)$  и  $L_2(F(t_1^2, \dots, t_{r_2}^2, l_1^2, \dots, l_{r_2}^2), \mu_{\sigma_2}^2)$ , то они эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:  $r_1 = r_2$ ;  $t_j^1 = t_j^2$ ,  $l_j^1 = l_j^2$ ,  $j = 1, \dots, r_1$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Литература

1. Досовицкий А. А. Серия мер на множестве кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности и соответствующие представления группы диффеоморфизмов окружности // Материалы международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2010», Математика и механика.

2. Досовицкий А. А. Некоторые меры на множестве кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности и связанные с ними представления группы диффеоморфизмов окружности // Матем. заметки, 88, No 6, 2010, с. 946–949.
3. Shavgulidze E. T. Some Properties of Quasi-Invariant Measures on Groups of Diffeomorphisms of the Circle // Russian Journal of Mathematical Physics, 7, No 4, 2000, pp. 464–472.
4. Kosyak A. V. Irreducible Regular Gaussian Representations of the Groups of the Interval and Circle Diffeomorphisms // Journal of Functional Analysis, 125, 1994, pp. 493–547.
5. Kuzmin P. A. On circle diffeomorphisms with discontinuous derivatives and quasi-invariance subgroups of Malliavin-Shavgulidze measures // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330, 2007, pp. 744–750.