Секция «Математика и механика»

Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений относительно функций бесконечномерного аргумента

Ремизов Иван Дмитриевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ivremizov@yandex.ru

Сообщение посвящено представлению формулами Фейнмана решения задачи Коши для параболического уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, зависящими от бесконечномерной пространственной координаты, но не зависящими от времени.

Эволюционное уравнение вида $\frac{\partial}{\partial t}f = Lf$ можно интерпретировать как математическую модель процесса распространения тепла или диффузии в анизотропной неоднородной стационарной среде. Пусть процесс диффузии рассматривается в подмножестве G линейного пространства H. Формулой Фейнмана называется равенство

$$f(t,x) = \lim_{n\to\infty}\int_G \dots n \dots \int_G N_1(t,x_1)\dots N_n(t,x_n)\mu(dx_1)\dots\mu(dx_n),$$

в котором $f(t,x)$ — решение эволюционного уравнения, N_k — некоторые определённые на $\mathbb{R}_+\times G$ функции, а μ — мера в G; в правой части равенства стоит предел кратного интеграла при безграничном увеличении его кратности.

В конечномерном пространстве H формулы Фейнмана для уравнения с переменными коэффициентами доказаны в [1] и [2]. В предположении $\dim H = \infty$ формулы Фейнмана рассматривались в [3], но только для случая постоянного коэффициента при старшей производной. В настоящем сообщении сформулировано предложение о возможном виде формул Фейнмана для уравнения с переменными коэффициентами в случае $\dim H = \infty$.

Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Символами $\nabla\varphi(x)$ и $\varphi''(x)$ обозначим первую и вторую производные Фреше числовой функции $\varphi\colon H\to\mathbb{R}$, вычисленные в точке $x\in H$. Коэффициенты A, B, C — непрерывные функции на H, причём при каждом $x\in H$: $A(x)\colon H\to H$ — линейный положительно определённый самосопряженный оператор на H с конечным следом, $B(x)\in H$ — вектор, $C(x)\in\mathbb{R}$ — число. Линейный дифференциальный оператор $\Delta_A\colon \varphi\longmapsto\Delta_A\varphi$ определяется по правилу $(\Delta_A\varphi)(x) = tr(A(x)\varphi''(x))\in\mathbb{R}$. Обозначим

$$(L\varphi)(x) = \frac{1}{2}(\Delta_A\varphi)(x) + \langle B(x),\nabla\varphi(x)\rangle + C(x)\varphi(x).$$

Заметим, что в тривиальном случае $H=\mathbb{R}^1$ получаем $(L\varphi)(x) = \frac{1}{2}A(x)\varphi''(x) + B(x)\varphi'(x) + C(x)\varphi(x)$, где A, B, C, φ — числовые функции одной числовой переменной.

Предложение 1. Пусть $f(t,x)$ — решение задачи Коши:

$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = Lf(t,x), t > 0, x \in H;$

$f(0,x) = f_0(x), x \in H.$

При выполнении некоторых условий регулярности существует вещественная заданная на некоторой сигма-алгебре подмножеств пространства H сигма-аддитивная мера μ и существуют функции $g_n(t, x_1, \ldots, x_n)$ такие, что при любых $x_0 \in H$ и $t > 0$ имеет место формула Фейнмана:

$f(t,x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_H \ldots n \ldots \int_H \exp\left(\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(x_{j-1})\right) \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^n \langle (A^{-1}B)(x_{j-1}), x_{j-1}\rangle\right)$

$\cdot p_A(t/n, x_0, x_1) \ldots p_A(t/n, x_{n-1}, x_n) f_0(x_n) g_n(t, x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$, где $V(x) = C(x) - \frac{1}{2}\langle (A^{-1}B)(x), B(x)\rangle$ для $x \in H$ и $p_A(t,x,y) = \exp\left(\frac{-1}{2t}\langle A^{-1}(x)(x-y), x-y\rangle\right)$ для $x \in H, y \in H, t > 0$.

Явный вид меры μ и функций g_n ещё предстоит уточнить. Как и в случае $\dim H < \infty$, ключом к построению и доказательству формулы Фейнмана может стать теорема Чернова (см. [4], [5]).

Литература

1. Ya.A. Butko, M. Grothaus, O.G. Smolyanov. — Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, vol. 13, No. 3 (2010), p. 377–392.

2. В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. — ДАН, том 433, № 3, Июль 2010, с. 314-317.

3. Я.А. Бутко. — Нелинейная динамика, 2006, т.2, №1, с. 75-87

4. O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev and A. Truman. — J. Math. Phys. 43 (2002) 5161–5171.

5. P. Chernoff. — Mem. Amer. Math. Soc. 140 (1974).