Секция «Математика и механика»

Описание коммутативных матричных подалгебр длины n-2 над алгебраически замкнутыми полями

Маркова Ольга Викторовна
Кандидат наук
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ov_markova@mail.ru

Изучение коммутативных матричных алгебр является классической областью исследований, восходящей еще к работе Шура [3] 1905 г. Одним из активно развивающихся направлений в данной области является классификация коммутативных матричных алгебр с заданными числовыми характеристиками.

Автором предлагается описание коммутативных матричных алгебр относительно такого инварианта алгебры, как *длина*. Определим ее согласно [2].

Длиной конечной системы $\mathcal{S}$ порождающих конечномерной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ над произвольным полем называется наименьшее натуральное число $l(\mathcal{S})$, такое что слова длины не большей $l(\mathcal{S})$ порождают данную алгебру как векторное пространство. *Длиной алгебры* называется максимум длин ее систем порождающих, обозначим ее $l(\mathcal{A})$.

Отметим, что функция длины играет важную роль, например, в вычислительных методах теории матриц, поскольку она определяет меру сложности некоторых рациональных процедур.

Для коммутативных матричных алгебр ранее получена следующая точная линейная относительно порядка матриц верхняя оценка длины:

Теорема ([1]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в полной алгебре матриц $M_n(\mathbb{F})$. Тогда*

1. $l(\mathcal{A}) \leq n-1$;

2. $l(\mathcal{A}) = n-1$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей C, т.е. такой матрицей $C \in M_n(\mathbb{F})$, что $\dim_{\mathbb{F}}(\langle E_n, C, C^2, \ldots, C^{n-1}\rangle) = n$.

В настоящем докладе предлагается описание коммутативных подалгебр в $M_n(\mathbb{F})$ длины $n-2$, т.е. длины на единицу меньшей максимальной, над алгебраически замкнутыми полями.

Теорема. *Пусть $n \geq 2$ и пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Положим $A = E_{1,2}+\cdots+E_{n-2,n-1}$, где $E_{i,j}$ обозначает (i,j)-ую матричную единицу. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$, содержащую единичную матрицу E_n. Тогда $l(\mathcal{A}) = n-2$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих алгебр:*

1. $\mathbb{F}E_n$, если $n = 2$;

при $n \geq 3$

2. $\mathbb{F}E_2 \oplus \mathcal{C}_{n-2}$, где $\mathcal{C}_{n-2} \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ — алгебра, порожденная циклической матрицей;

3. $\mathcal{A}_{0;n} = \langle E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-2}\rangle$;

4. $\mathcal{A}_{1;n} = \langle E_{1,n},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

5. $\mathcal{A}_{2;n} = \langle E_{n,n-1},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

6. при $n = 4$

i. $\mathcal{A}_{3;4} = \langle E_{1,4} + E_{4,31},\ C|\ C \in \mathcal{A}_{0;n}\rangle$;

ii. $= 2$, $\mathcal{A}_{4;4} = \langle E_4, E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4}\rangle$;

7.j. $\mathcal{A}_{j;m} \oplus \mathcal{C}_{n-m}$, *где* $j = 0, 1, 2$, $3 \leq m \leq n$ $\mathcal{C}_{n-m} \in M_{n-m}(\mathbb{F})$ — *алгебра, порожденная циклической матрицей.*

Литература

1. Guterman A.E., Markova O.V. Commutative matrix subalgebras and length function// Linear Algebra and its Applications. 2009. No. 430. P. 1790-1805

2. Pappacena C.J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra// Journal of Algebra. 1997. No. 197. P. 535-545

3. Schur I. Zur Theorie der Vertauschbären Matrizen// Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1905. No.130. P. 66-76

Слова благодарности

Автор выражает особую благодарность А.Э. Гутерману за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом МД-2535.2009.1.