Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Равномерная сеточная аппроксимация негладких решений с улучшенной сходимостью для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с характеристическими слоями

Жемухов Умар Хазреталиевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

E-mail: zhemukhov-u@yandex.ru

В квадрате $\Omega = (0,1)^2$ с границей $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ рассматривается смешанная краевая задача для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с конвективным членом [1, 4, 5]:

$$Lu \equiv -\varepsilon\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + qu = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega,$$

$$u = g(x,y),\ (x,y) \in \Omega_D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(x,y),\ (x,y) \in \Omega_N,$$

где $\varepsilon \in (0,1]$ - малый параметр, а n - единичный вектор внешней нормали; $a = const > 0$, $q = const > 0$, $\partial\Omega_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, $\partial\Omega_N = \Gamma_2 \cup \Gamma_4$, где, например, $\Gamma_1 = \{\,(x,y) \in \partial\Omega \mid x = 0\,\}$ и далее против часовой стрелки. Наибольший интерес представляет случай $\varepsilon \leqslant cN^{-1}$.

Предполагается достаточная гладкость правой части и граничных функций, что обеспечивает необходимую гладкость искомого решения в рассматриваемой области, за исключением окрестностей угловых точек [4]. В двух выходящих угловых точках $(1,0)$ и $(1,1)$ предполагаются выполненными только условия согласования нулевого порядка, а в остальных двух углах требуем условия согласования до 1-го порядка [4]. Как правило, в случае сингулярно возмущенных эллиптических уравнений конвекции-диффузии, порядок ε-равномерной сходимости классических схем не выше первого. Для численного решения поставленной задачи используется разностная схема с улучшенной сходимостью [3] на прямоугольной кусочно-равномерной сетке Шишкина [2]. При этом область Ω разбивается на две части. Вне окрестности выходящей границы Γ_3 области применяется схема с направленной разностью, в то время как в ее окрестности используется схема с центральной разностью для аппроксимации конвективного члена. При сделанных предположениях доказывается равномерная, относительно ε, сходимость численного решения к точному решению в дискретной равномерной метрике со скоростью $O(\sqrt{\varepsilon}N^{-1}\ln N)$ в области характеристического слоя и со скоростью $O(N^{-2}\ln^2 N)$ в остальной части, где N - число узлов сетки в каждом координатном направлении.

Литература

1. Андреев В.Б. Pointwise approximation of corner singularities for singularly perturbed elliptic problems with characteristic layers // Internat. J. of Num. Analysis and Modeling, v. 7, n. 3, (2010), pp. 416-428.
2. Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений: Екатеринбург, УрО РАН, 1992.
3. Clavero C., Gracia J. L., Lisbona, F., Шишкин Г.И. A robust method of improved order for convection-diffusion problems in a domain with characteristic boundaries // ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 82 (2002), pp. 631- 647.
4. Naughton A., Stynes M. Regularity and derivative bounds for a convection-diffusion problem with Neumann boundary conditions on characteristic boundaries // Zeitschrift fur Anal. Anwend., 29:2 (2010), pp. 163–181.
5. O'Riordan E., Шишкин Г.И. Parameter uniform numerical methods for singularly perturbed elliptic problems with parabolic boundary layers // Appl. Numer. Math., 58(2008), 1761-1772.