Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Бикомпактная монотонная схема для многомерного линейного уравнения переноса

Михайловская Маргарита Николаевна
Аспирант
Московский физико-технический институт, Факультет управления и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: m.n.mikhailovskaya@gmail.com

Рассматривается способ построения *бикомпактных* разностных схем четвертого порядка аппроксимации по пространственной переменной на минимальном (*двухточечном*) шаблоне для уравнений и систем уравнений гиперболического типа. В отличие от [9], исходное уравнение для искомой функции дополняется не уравнением для пространственных производных от этой функции, а уравнением для первообразной от функции. Например, в случае смешанной задачи Коши для линейного уравнения переноса:

$$u_t + au_x = 0, \qquad a>0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \geq 0; \qquad u(0,t) = \mu(t), \quad t \geq 0.$$

в число искомых функций наряду с функцией u вводится первообразная v от функции au: $v_x = au$.

Преимущество такого подхода очевидно в случае построения разностных схем для сквозного расчета разрывных решений, поскольку первообразная от функции имеет на единицу большую гладкость, чем сама функция. Кроме того, благодаря двухточечному пространственному шаблону схемы, решение разностных уравнений может быть осуществлено методом бегущего счета.

Бикомпактная схема для многомерного линейного уравнения переноса строится путем покоординатного расщепления многомерного дифференциального оператора на одномерные операторы [1, 4]. Получающиеся в результате расщепления одномерные задачи численно решаются с использованием монотонной бикомпактной схемы [6] для линейного одномерного уравнения переноса. В данной работе обобщение бикомпактной схемы на многомерный случай проиллюстрировано на примере двумерного линейного уравнения переноса

$$u_t + au_x + bu_y = 0, \qquad a, b = const>0,$$

с начальными данными

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x,0,t) = \mu_2(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предложенная многомерная схема является абсолютно устойчивой и монотонной. В работе также приводятся результаты оценки реальной точности многомерной схемы путем расчета на сгущающихся сетках для тестовой задачи с известным точным решением по методике [3].

Литература

1. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.. Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
4. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
5. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН. 2010. Т.430. No.4. С. 470-474.
6. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // ДАН. 2011. Т.436. No.5. С. 600-605.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003.
8. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
9. Холодов А.С., Холодов Я.А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // ЖВМиМФ. 2006. Т.46. No.9. С. 1638-1667.

Слова благодарности

Выражаю особую благодарность моему научному руководителю, д.ф.-м.н. Борису Вадимовичу Рогову, за постановку задачи, великолепные советы и постоянный контроль, а также за моральную поддержку и понимание, которые создавали творческие условия для работы.