**Логика Lisp и трехзначная логика Лукасевича**

***Томова Наталья Евгеньевна***

*студентка, V курс*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: natalya-tomova@yandex.ru*

Прежде всего определим термин «логика». Будем рассматривать логику с функциональной точки зрения, т.е. как любое непустое множество функций на данном k-элементном множестве, замкнутое относительно операции суперпозиции.

В работе подробно представлено соотношение логики Lisp и трехзначной логики Лукасевича, а также указано на возможность построения своеобразной классификации трехзначных логик с учетом того, какие операции – решеточные, промежуточные или квази-решеточные, - лежат в основе той или иной трехзначной системы.

В основе слабой трехзначной логики Клини ($\mathrm{K}_3^W$) – деморгановская дистрибутивная квазирешетка, в то время как алгебраическая структура, соответствующая сильной логике Клини ($\mathrm{K}_3$), дистрибутивная решетка Де Моргана. Кроме того есть еще так называемая промежуточная между сильной и слабой логиками Клини трехзначная логика Lisp ($\mathrm{K}_3^{\to}$) . Она рассмотрена в работе [Лукьяновская, 2003].

Далее остановимся подробно на той части классификации, где представлены трехзначные системы, в основе которых лежат промежуточные операции.

$$\begin{tikzcd}
& \langle \vee^{\to},\wedge^{\to}\rangle \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c}\langle \vee^{\to},\wedge^{\to},\sim\rangle \\ \left(\mathrm{K}_3^{\to}\right)\end{array} \arrow[d] & & \begin{array}{c}\langle \vee^{\to},\wedge^{\to},J_0\rangle \\ \left(\pounds_3\right)\end{array} \arrow[dd] \\
\begin{array}{c}\langle \vee^{\to},\wedge^{\to},\sim,J_i\rangle \\ \left(\pounds_3\right)\end{array} \arrow[d] & & \\
\begin{array}{c}\langle \vee^{\to},\wedge^{\to},\sim,J_i,T\rangle \\ \left(\pounds_3^{\mathrm{T}}\right)\end{array} & & \begin{array}{c}\langle \vee^{\to},\wedge^{\to},J_0,T\rangle \\ \left(\pounds_3^{\mathrm{T}}\right)\end{array}
\end{tikzcd}$$

Пусть

$$j_i(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x=i\\ 0, \text{ если } x\neq i.\end{cases}$$

Логическая матрица для $\mathrm{K}_3^{\to}$ выглядит следующим образом:

$\mathrm{M}_3^{\mathrm{K}\to}=\langle\{0,½,1\},\sim,\vee^{\to},\wedge^{\to},\{1\}\rangle$, где $\{1,\ ½,\ 0\}$ есть множество истинностных значений; $\{1\}$ есть множество выделенных значений; $\sim$ - унарная, $\vee^{\to},\wedge^{\to}$ - бинарные операции.

Оказалось, что трехзначную логику Лукасевича ($£_3$) можно строить как расширение логики Lisp посредством добавления одного из $J_i$-операторов. Для этого достаточно показать, что в полученных системах выразима импликация Лукасевича.

Итак, в системе $K_3^{\to} + J_1$ импликацию Лукасевича можно выразить следующим образом:

$$x \to y = (J_1(x) \wedge^{\to} (x \wedge^{\to} y)) \vee^{\to} (\sim (J_1(\sim y)) \vee^{\to} \sim (x \vee^{\to} y)).$$

Известно, что $J_1(x) = J_0(\sim x)$ и, соответственно, $J_0(x) = J_1(\sim x)$. Тогда в системе $K_3^{\to} + J_0$ импликация Лукасевича может быть определена так:

$$x \to y = (J_0(\sim x) \wedge^{\to} (x \wedge^{\to} y)) \vee^{\to} (\sim (J_0(y)) \vee^{\to} \sim (x \vee^{\to} y)).$$

Однако, в $K_3^{\to} + J_{½}$ выразим $J_1$: $J_1(x) = \sim (\sim J_{½}(x) \wedge^{\to} \sim x) \vee^{\to} J_{½}(x)$, заметим, что $J_0(x) = (\sim J_{½}(x) \wedge^{\to} \sim x)$, а, следовательно, выразима и импликация $£_3$. Последнее можно сделать следующим образом:

$$x \to y = (\sim (J_0(x)) \vee^{\to} J_{½}(x)) \wedge^{\to} (x \wedge^{\to} y))) \vee^{\to} (\sim (J_0(y)) \vee^{\to} \sim (x \vee^{\to} y)).$$

Таким образом, при добавлении к $K_3^{\to}$ любого $J_i$-оператора, получаем логику, по своим функциональным свойствам эквивалентную $£_3$. Причем аналогичное утверждение верно и для сильной логике Клини ($K_3$). Добавив к $£_3$ оператор Слупецкого, получим функционально полную трехзначную логику, которую обозначают посредством $£_3^{T}$.

Более того, мы получим систему, функционально эквивалентную $£_3$, если в качестве исходных возьмем следующие связки: $J_0, \vee^{\to}, \wedge^{\to}$. Посредством последних можно выразить отрицание Лукасевича:

$\sim x = (x \wedge^{\to} J_0(x)) \vee^{\to} J_0(x)$, а далее, учитывая приведенные выше соотношения, получаем и импликацию $£_3$.

**Литература**


[Аншаков О.М., Рычков С.В., 1982] Аншаков О.М., Рычков С.В. О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика. Вып. 19. С.90-117.

[Бочвар, 1938] Бочвар Д.А. Об одном трёхзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функциональого исчисления // Математический сборник. Т.4. №2. С.287-308. 1938.

[Карпенко, 2003] Карпенко А.С. Введение в многозначную пропозициональную логику: учебное пособие. – М., 2003. – 112с.

[Лукьяновская, 2003] Лукьяновская Е.Ю. Дипломная работа на тему «регулярные логики Клини».