Возникновение зоны параметрического резонанса на границе области устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений[1]

Нестеров Павел Николаевич

ассистент

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E–mail: mathematix@mail.ru

Явление линейного параметрического резонанса достаточно хорошо изучено (Матье, Хилл, Хаупт, Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси, А.А. Андронов, А.А. Витт). Известно, что это явление наблюдается уже в системах с одной степенью свободы. Отметим, например, уравнение $\ddot{x}+\omega^2\left[1+\varepsilon f(t)\right]x=0$, где ω – вещественный параметр, ε – малый положительный параметр, $f(t)$ – почти периодическая функция. Рассмотрим теперь параметрическое возмущение гармонического осциллятора силой с убывающей со временем амплитудой (так называемый адиабатический осциллятор): $\ddot{x}+\left[1+q(t)\right]x=0$, где $q(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Исследованию такого рода уравнений посвящено немало работ (см., например, [1,2]). Совсем недавно для анализа некоторых уравнений из этого класса стал использоваться метод усреднения Крылова-Боголюбова (в этой связи отметим работу [3]). В работе [4] был найден адиабатический осциллятор, у которого в плоскости параметров существует область параметрического резонанса. Именно, в качестве $q(t)$ была выбрана функция $\dfrac{a\sin(t+\alpha\ln(t))}{\sqrt{t}}$. Используя идеи метода усреднения в сочетании с фундаментальной теоремой Левинсона [5], удалось показать, что область параметрического резонанса для этого уравнения представляет собой множество $-\dfrac{5a^2}{24}\le\alpha\le\dfrac{a^2}{24}$, $a\ne 0$. В дальнейшем автором была предпринята попытка объяснить причину возникновения зоны резонанса в этом, а также в некоторых других уравнениях из класса адиабатических осцилляторов. На сей раз рассматривались уравнения, в которых $q(t)=\dfrac{a\sin(t+\varphi(t))}{t^{\rho}}$, $\rho>0$, а в качестве $\varphi(t)$ были взяты функции $\alpha\ln(t)$, αt^{β}, $0<\beta<1$. Оказалось, что это явление наблюдается на границе зоны устойчивости решений. В первом случае такой границей в пространстве параметров служит плоскость $\rho=1/2$, а во втором – гиперплоскость $\beta+2\rho-1=0$.

Литература

1. Wintner A. (1946) The Adiabatic Linear Oscillator // Amer. J. Math. V. 68, p. 385 – 397.
2. Harris W.A.Jr., Lutz D.A. (1975) Asymptotic Integration of Adiabatic Oscillators // Journal of Mathematical Analysis and Applications. V. 51, №1, p. 76 – 93.
3. Бурд В.Ш., Каракулин В.А. (1998) Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Матем. заметки. Т. 64, №5, с. 658 – 666.
4. Бурд В.Ш., Нестеров П.Н. (2006) Параметрический резонанс в одном уравнении из класса адиабатических осцилляторов // Модел. и анализ информ. систем. Ярославль. Т. 13, № 2, с. 48–54.
5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. (1958) Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.630).