Буферность в системе трех однонаправленно связанных телеграфных уравнений[1]

Глызин Дмитрий Сергеевич

научный сотрудник

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: glyzin@gmail.ru

Рассмотрим краевую задачу, представляющую собой систему трех осцилляторов с малой однонаправленной связью и краевыми условиями Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+u_j+\varepsilon u_{j-1}=a^2\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}-bu_j^3-u_j^2\frac{\partial u_j}{\partial t},\qquad u_j|_{x=0}=u_j|_{x=\pi}=0, \tag{1}$$

где $j=1,2,3,\ u_0=u_3,\ 0<\varepsilon\ll 1,\ a,b=\mathrm{const}>0$.

Фазовым пространством для $(u_j(t,x),\dfrac{\partial u_j(t,x)}{\partial t})$ считаем $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\pi)\times\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^i(0,\pi)$ – соболевские пространства функций с нулевыми граничными условиями из (1). Исследуем существование и устойчивость периодических решений, бифурцирующих из нулевого состояния равновесия при $\varepsilon>0$, методом квазинормальных форм. Линеаризуем в нуле уравнение из (1) при $\varepsilon=0$. Полученная задача допускает решения вида $u_j(t,x)=e^{\pm i\omega_n t}\sin nx$, с частотами $\omega_n=\sqrt{1+a^2n^2}$, $n=1,2,\ldots$ Выполним в (1) подстановку

$$u_j(t,x)=\varepsilon^{1/2}u_{j,1}(t,\tau,x)+\varepsilon^{3/2}u_{j,2}(t,\tau,x),\quad \tau=\varepsilon t,$$
$$u_{j,1}=\sum_{k=1}^{\infty}(z_j^k(\tau)e^{i\omega_k t}+\overline{z}_j^k(\tau)e^{-i\omega_k t})\sin kx. \tag{2}$$

Условие разрешимости краевой задачи при $\varepsilon^{3/2}$ в классе периодических функций даст квазинормальную форму

$$\dot z_j^n=\frac{i}{2\omega_n}z_{j-1}^n+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3ib}{2\omega_n}\right)\left(\frac{3}{4}|z_j^n|^2+\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}|z_j^k|^2\right)z_j^n,\qquad j=1,2,3,\quad n=1,2,\ldots \tag{3}$$

Как известно (см. [1, гл. 2]), в общем случае автомодельным циклам системы (3) с конечным числом ненулевых компонент, то есть решениям вида $z_j^n=\xi_j^n e^{i\varphi_n\tau}$, $n=n_1,n_2,\ldots n_s$, соответствуют торы исходной системы (1) с теми же свойствами устойчивости. При $s=1$ условия, обеспечивающие устойчивость инвариантного цикла задачи (1) можно получить в явном виде.

Теорема 1. Пусть выполнено условие $(b^2c_0^2-1)/n^2<a^2<7/(9n^2-16)$, где $c_0=\mathrm{const}>0$. Тогда существует $\varepsilon_0>0$, такое что задача (1) при любом $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл с асимптотикой (2), где $z_j^k=0$ при $k\neq n$.

Отметим, что при подходящем выборе параметра b, можно путем согласованного уменьшения параметров a и ε_0 добиться устойчивости сколь угодно большого числа циклов задачи (1), то есть в данном случае реализуется явление буферности.

Литература

1. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М., 2004.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.630).