Асимптотическое поведение дифференциальных уравнений второго порядка с почти степенными нелинейностями

Белозерова Мария Александровна
аспирант
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина
E–mail: Marbel@ukr.net

Устанавливаются асимптотические представления достаточно широкого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка с так называемыми правильно меняющимися в некоторой точке (возможно и на бесконечности) нелинейностями.

Результаты

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''=\alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'),\quad (1)$$

где $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ ($-\infty<a<\omega\le+\infty$)— непрерывная функция, $\varphi_i:\Delta_i\to]0,+\infty[$ (i=0,1) — строго монотонные, дважды непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_i}}\frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)}=\sigma_i,\quad \limsup_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_i}}\left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right|<+\infty,\quad Y_i=\begin{cases}\text{либо } 0,\\ \text{либо } \pm\infty,\end{cases}\quad \Delta_i=\begin{cases}\text{либо } [y_i^0,Y_i[,\\ \text{либо }]Y_i,y_i^0]\end{cases}\ ^{1}\quad (i=0,1),$$

$\sigma_i\in R$, *причем* $\sigma_0+\sigma_1\ne1$.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением, если

$$y^{(i)}:[t_0,\omega[\to\Delta_i\quad(a\le t_0<\omega),\quad \lim_{t\uparrow\omega}y^{(i)}(t)=Y_i\quad(i=0,1),\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}=\lambda_0.$$

Теорема. *Для существования у уравнения (1)* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$*-решений, где* $\lambda_0\in R\setminus\{0,1,\sigma_1-1\}$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$Y_0=\begin{cases}\pm\infty,\ \text{если } \lambda_0\alpha_0y_1^0>0,\\ 0,\ \text{если } \lambda_0\alpha_0y_1^0<0,\end{cases}\quad Y_1=\begin{cases}\pm\infty,\ \text{если } \alpha_0y_1^0>0,\\ 0,\ \text{если } \alpha_0y_1^0<0,\end{cases}\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=\frac{\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)}{1-\lambda_0},$$

$$\alpha_0\lambda_0y_0^0>0,\quad \alpha_0(\lambda_0-1)y_1^0\pi_\omega(t)>0,$$

где

$$I(t)=\int_{A_\omega}^{t}p(\tau)\frac{\pi_\omega(\tau)}{|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{\lambda_0\sigma_1}{\lambda_0-1}}}\varphi_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)d\tau,\ A_\omega=a,\ \text{при}\ \int_{a}^{\omega}p(\tau)\frac{\pi_\omega(\tau)}{|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{\lambda_0\sigma_1}{\lambda_0-1}}}\varphi_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)d\tau=+\infty,$$

и $A_\omega=\omega$ *в противном случае.*

Более того, для таких решений при некотором ограничении на одну из функций φ_i (i=0,1) получены при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$\frac{|y(t)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign}y(t)}{\varphi_0(y(t))}=\alpha_0\left|\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{\sigma_1}(1-\lambda_0)(\sigma_0+\sigma_1-1)I(t)[1+o(1)],\quad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)].$$

При $\varphi_1(y')\equiv1$ уравнение (1) исследовалось в [1].

Литература

1. Евтухов В.М., Кириллова Л.А Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференц. уравнения. - 2005, - 41, № 8. - С. 1053-1061.

---

[1] При $Y_i=+\infty$ ($Y_i=-\infty$) считаем $y_i^0>0$ ($y_i^0<0$) соответсвенно.