

Секция «Математика и механика»

ПОДСЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА»

Векторные поля на супермногообразиях Π -симметричных флагов

Вишнякова Елизавета Геннадьевна

аспирант

Тверской государственной университет, Тверь, Россия

E-mail: predprin@list.ru

В книге [1] Ю.И.Манин построил четыре серии компактных комплексных супермногообразий, связанных с четырьмя сериями классических комплексных линейных супералгебр Ли, - так называемые супермногообразия флагов. Важным инвариантом комплексного супермногообразия является супералгебра Ли голоморфных векторных полей на нем, которая является конечномерной, если супермногообразие компактно.

В представляемой на конференцию работе вычислена супералгебра Ли голоморфных векторных полей $\mathfrak{v}(\Pi F_r)$ на супермногообразиях Π -симметричных флагов ΠF_r длины r в векторном суперпространстве $S^{n|n}$ произвольной размерности n , связанных с супералгеброй Ли $\pi_{n|n}$. Случай $r=1$ (Π -симметричные супермногообразия Грассмана ΠGr) был ранее изучен в работе [2]. Доказывается, что, за исключением некоторых вырожденных случаев, $\mathfrak{v}(\Pi F_r)$ изоморфна супералгебре Ли $\pi_{n|n}/\langle E_{n|n} \rangle$, причем все векторные поля порождаются линейными преобразованиями суперпространства $S^{n|n}$, перестановочными с Π . Идея доказательства состоит в следующем: супермногообразие ΠF_r расслаивается над некоторым Π -симметричным суперграссманианом ΠGr , причем слой является супермногообразием флагов длины $r-1$. При этом существует гомоморфизм $\mathfrak{v}(\Pi F_r) \rightarrow \mathfrak{v}(\Pi Gr)$, сюръективность которого известна. Основная трудность состоит в доказательстве тривиальности его ядра, из которого и следует искомый результат.

Каждому суперрасслоению было сопоставлено обычное комплексное аналитическое расслоение W , которое в случае супермногообразия Π -симметричных флагов оказалось однородным. Затем по теореме Бореля – Вейля – Ботта были вычислены глобальные сечения расслоения W , с помощью чего и удалось получить результат для супермногообразий флагов длины 2, а затем и для флагов произвольной длины.

В работе использованы методы теории линейных представлений, теории пучков, однородных расслоений, а также методы, разработанные в [3].

Литература

1. Манин Ю.И. «Калибровочные поля и комплексная геометрия» // М., Наука, 1984,
2. Onishchik A.L. “Non-split supermanifolds associated with the cotangent bundle” // Universite de Poitiers, Departement de Math., N 109. Poitiers, 1997,
3. Вишнякова Е.Г. «Векторные поля на супермногообразиях флагов» // Современные проблемы математики и информатики. Вып.8, Ярославль, ЯрГУ, 2006, С 22-36.

K -малые абелевы группы**Гердт Ирина Владимировна**

аспирант

Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: Irina_Gerdt@mail.ru

При исследовании групп гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B большой интерес представляют гомоморфизмы в прямые суммы и прямые произведения и гомоморфизмы из прямых сумм и прямых произведений. В [1] доказано, что существует естественный изоморфизм $\text{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} B_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)$.

Если же взять группы гомоморфизмов $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right)$ и $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)$, то в общем случае изоморфизма нет. Можно лишь утверждать, что

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i) \subset \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \subsetneq \text{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i).$$

Возникает естественный вопрос: для каких абелевых групп A будет существовать изоморфизм $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)$?

Пусть K – некоторый класс абелевых групп. Абелеву группу A назовем *малой относительно K* , или *K -малой*, если для любого семейства групп $\{B_i\}_{i \in I}$, где $B_i \in K$ для всякого $i \in I$ имеет место естественный изоморфизм $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)$.

Последнее равносильно тому, что для любого гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$ найдутся индексы $i_1, \dots, i_k \in I$ такие, что $\varphi A \subset B_{i_1} \oplus \dots \oplus B_{i_k}$.

Если класс K совпадает с классом всех абелевых групп, то K -малую группу A будем называть *малой*.

Получены следующие результаты. Пусть D – класс всех делимых групп.

Теорема 1. Следующие условия для абелевой группы A эквивалентны:

- A – D -малая группа;
- A – конечно порожденная группа;
- A – малая группа.

Обозначим через \mathfrak{R} – класс всех редуцированных групп. Пусть P – множество всех простых чисел. Через G^1 будем обозначать *ульмовскую подгруппу группы G* ,

$$G^1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nG = \bigcap_{p \in P} \bigcap_{k=1}^{\infty} p^k G \quad ([1], \text{ с. 40}).$$

Теорема 2. Для группы A следующие условия эквивалентны:

- 1) A – \mathfrak{R} -малая группа;
- 2) если M есть эпиморфный образ группы A и M – прямая сумма циклических групп конечного порядка, то M – конечная группа;
- 3) если M есть эпиморфный образ группы A и M – периодическая группа, то M – прямая сумма делимой и конечной групп;
- 4) для любых групп \hat{A}_i ($i \in I$), таких, что $B_i^1 = 0$, и любого гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$ существует конечное подмножество $J \subseteq I$, такое, что $\varphi(A) \subseteq \bigoplus_{i \in J} B_i$.

С помощью Теоремы 2 доказан результат:

Теорема 3. Пусть A – периодическая группа. Группа A является \mathfrak{F} -малой, тогда и только тогда, когда A – прямая сумма делимой и конечной групп.

Литература

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1974. – Т.1. – 336 с.

Характеры унитарной группы над конечным полем

Игнатъев Михаил Викторович¹

студент

Самарский государственный университет, Самара, Россия

E-mail: mihail_ignatev@samaramail.ru

Классификация унитарных неприводимых представлений групп Ли относится к классическим задачам теории представлений. Предложенный А.А. Кирилловым метод орбит [1, 2] позволяет в случае нильпотентных групп Ли свести задачу к описанию орбит коприсоединённого представления. К сожалению, для конкретных групп описание коприсоединённых орбит само по себе может представлять весьма трудную проблему. В частности, до сих пор известна классификация орбит коприсоединённого представления группы $UT(n, \mathbf{R})$ строго верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали лишь при малых значениях n .

В то же время, в последнее время всё больший интерес приобретает задача переноса метода орбит на случай конечных групп типа Ли; к примеру, можно рассмотреть алгебраическую группу $UT(n, \mathbf{F}_q)$ (см. по этому поводу [3]). Эта задача также далека от своего разрешения, хотя отдельные результаты в этой области получены (см., например, работу К. Андре [4]).

Нами построены таблицы неприводимых характеров унитарной группы для $n \leq 5$ (для наглядности формул рассмотрен случай простого q). Отталкиваясь от идей метода орбит, мы вычислили некоторый набор характеров $UT(5, \mathbf{F}_q)$. А именно, для каждой орбиты рассмотрена некоторая подалгебра в алгебре Ли, соответствующая ей подгруппа, с некоторого характера который индуцируется представлением. Характер полученного представления подсчитывается при помощи стандартной техники индуцированных представлений конечных групп. Неприводимость и полнота построенной системы характеров доказывается непосредственным подсчётом скалярного произведения и проверки соотношений ортогональности.

Оказалось, что все неприводимые характеры могут быть описаны в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы. Вероятно, что дело обстоит так же и в общем случае, для произвольного n . К примеру, характер каждого представления основной серии при $n = 5$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi(g) &= 0, \text{ если } \alpha_1 = (y_{21}, y_{31}, y_{32}, y_{43}, y_{53}, y_{54}) \neq 0; \\ & q^3 \cdot \varepsilon^{(\xi_{15}(y_{51}y_{42} - y_{52}y_{41})/y_{42} + \xi_{24}y_{42})}, \text{ если } \alpha_1 = 0, y_{42} \neq 0; \\ & 0, \text{ если } \alpha_1 = y_{42} = 0, \alpha_2 = (y_{41}, y_{52}) \neq 0; \\ & q^4 \cdot \varepsilon^{(\xi_{15}y_{51})}, \text{ если } \alpha_1 = y_{42} = \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

¹ Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.Н. Панову за постоянное внимание и поддержку

(здесь $g = (y_{ij})$ – произвольный элемент группы $UT(5, \mathbf{F}_q)$, ε – первообразный корень степени q из единицы, а ξ_{15}, ξ_{24} – произвольные ненулевые константы из \mathbf{F}_q , которое естественно отождествляется с множеством вычетов по модулю q).

Также в работе доказываются некоторые общие факты относительно (неприводимых) характеров основной серии представлений.

Литература

1. Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // Успехи мат. наук, 1962, т. 17, с. 57-110.
2. Кириллов А.А. Метод орбит. – Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002.
3. Kirillov A.A. Variations on the triangular theme // Amer. Math. Soc. Transl(2), 1995, v. 69, p. 43-72.
4. Andre C.A.M. The basic character table of the unitriangular group // J. Algebra, 2001, v. 241, p. 437-471.

Индексы специальных кривых рода 1 над недиадическими полями \mathcal{Q}_p

Прокончук Александр Васильевич

аспирант

Институт математики Национальной академии наук Беларуси,

г.Минск, Беларусь

E-mail: alexpro@im.bas-net.by

В арифметической теории групп Брауэра важную роль играют относительные группы Брауэра $Br(\mathcal{Q}(C)/\mathcal{Q})$ для конечнопорожденных расширений \mathcal{Q} , где $\mathcal{Q}(C)$ — поле функций кривой C . Описание таких групп тесно связано с вычислением $Br(\mathcal{Q}_p(C)/\mathcal{Q}_p)$. Общие результаты, полученные к настоящему времени, весьма малочисленны и опираются на глубокие арифметические свойства кривых, определенных на глобальными и локальными полями. Отметим, что в случае локальных полей индекс кривой C совпадает с порядком группы $Br(\mathcal{Q}_p(C)/\mathcal{Q}_p)$.

Мы исследуем группы $Br(\mathcal{Q}_p(C)/\mathcal{Q}_p)$ в случае кривых C рода 1 над недиадическими полями \mathcal{Q}_p , аффинная часть которых определяется уравнением

$$y^2 = ax^4 + b, \text{ где } a, b \in \mathcal{Q}_p.$$

Полученные результаты дополняют исследования В. Геела, В.И. Янчевского [1-3], а также автора и В.И. Янчевского, решивших аналогичную задачу для поля \mathcal{Q}_2 [4].

Пусть \mathbf{Z}_p — кольцо целых поля \mathcal{Q}_p , а U_p — группа единиц кольца \mathbf{Z}_p . Обозначим через a элемент из U_p , не являющийся квадратом. Можно считать, что коэффициенты аффинной кривой $y^2 = ax^4 + b$, где $a, b \in \mathcal{Q}_p$ лежат в \mathbf{Z}_p . Более того, коэффициент $a \in \{a, p, ap\}$, а b делится самое большее на третью степень элемента p . Ввиду того, что группа $Br(\mathcal{Q}_p(C)/\mathcal{Q}_p)$ состоит не более чем из двух элементов, то достаточно определить, когда индекс $I(C)$ кривой C равен 2.

Теорема Пусть кривые C/\mathcal{Q}_p заданы аффинными уравнениями вида $y^2 = ax^4 + b$, где $a, b \in \mathcal{Q}_p$. Тогда

- а) Если $b \in U_p$, то $I(C) = 1$.
- б) Если $b = pb_1$, $b_1 \in U_p$, то $I(C) = 2$.
- в) Если $b = p^2b_1$, $b_1 \in U_p$, то $I(C) = 2$ тогда и только тогда, когда b_1 — не квадрат.
- д) Если $b = p^3b_1$, $b_1 \in U_p$, то $I(C) = 2$.

Литература

1. Van Geel J., Yanchevskii V.I., Indices of hyperelliptic curves over p-adic fields, Manuscripta math. 1998, vol.96, P. 317-333.
2. Van Geel J., Yanchevskii V.I., Indices of double coverings of genus 1 over p-adic fields, Annales de Toulouse Mathematiques, Serie 6, Vol. VIII, fascicule1, pp. 155–172.
3. Van Geel J., Yanchevskii V.I., The Index of certain hyperelliptic curves over p-adic fields, Bull. Belg. Math. Soc. 2003, V. 10, P. 345-353. Osinovskaya A.A. Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1 -subgroups. // Communications in Algebra. 2003. Vol. 31. No 5. P. 2357 – 2379.
4. Прокопчук А.В., Янчевский В.И. Относительные группы Брауэра полей рациональных функций кривых рода 1 над специальными полями // Труды Института математики. 2005. Т. 13. № 2. С. 60 - 73.

О спектре линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости

Прибыль Марина Александровна

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: zcd043@sectorb.msk.ru

Пусть $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \bar{v}(x))$ - решение стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, где $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ - скорость жидкости, \bar{v} - удельный объем. Рассмотрим линеаризацию на этом решении стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости и для полученных уравнений исследуем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{v}(x)} \Delta u_1(x) + \left(\frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1(x)}{\partial x_1} + p'(\bar{v}) \right) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1(x)}{\partial x_2} \right) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} - \lambda u_1 &= 0, \\ \frac{1}{\bar{v}(x)} \Delta u_2(x) + \left(\frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2(x)}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2(x)}{\partial x_2} + p'(\bar{v}) \right) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} - \lambda u_2 &= 0, \\ \operatorname{div} u(x) - \lambda v(x) &= 0, \end{aligned}$$

где $u = (u_1, u_2)$ - скорость жидкости, v - удельный объем, $p(v) \in C^1(0, \infty)$ - давление, $x = (x_1, x_2)$ - лагранжевы координаты. Все функции удовлетворяют периодическим условиям на торе $T = [0, 2\pi k] \times [0, 2\pi k]$.

Перепишем заданную систему уравнений в абстрактной форме

$$(A(x, D) - \lambda E)U(x) = 0,$$

где $U(x) = (u_1, u_2, v)$ удовлетворяют периодическим условиям, оператор $A(x, D) : L_2(T) \times L_2(T) \times L_2(T) \rightarrow L_2(T) \times L_2(T) \times L_2(T)$, причем

$$\mathbf{D}(A(x, D)) = H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T), \quad \mathbf{R}(A(x, D)) = L^2(T) \times L^2(T) \times H^1(T). \text{ Для}$$

λ из резольвентного множества оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен на $\mathbf{R}(A(x, D))$.

Определение: (Хенри, 1985) Замкнутый оператор $A(x, D)$ называется секториальным, если существует сектор S на комплексной плоскости с вершиной на вещественном положительном луче R^+ такой, что для $\lambda \notin S$ определена резольвента $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$, а при $\lambda \in S$ оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен всюду, за исключением дискретного множества точек из S .

Получен следующий результат.

Теорема: Оператор $A(x, D)$ секториален.

Исходя из аналогии с методом стабилизации для параболических уравнений (Фурсиков, 2001), секториальность оператора $A(x, D)$ может быть использована, например, для построения метода стабилизации решения нестационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости.

Литература

1. Хенри Д. (1985) Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир.
2. Фурсиков А.В. (2001) Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. Сб. т. 192, № 4.

п-гомоморфизмы Фробениуса: алгебраические и топологические аспекты

Гугнин Дмитрий Владимирович

студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: dmitry-guginin@yandex.ru

Доклад посвящен развитию результатов автора, опубликованных в [3].

Понятие п-гомоморфизма было введено в работе В.М. Бухштабера и Э. Риса [1]. Теория развита в [2]. Далее под алгеброй мы понимаем коммутативную, ассоциативную алгебру с единицей над полем комплексных чисел C .

Пусть $f: A \rightarrow B$ – линейное отображение алгебр. Для любого натурального k определим полилинейное симметричное отображение $\Phi_k(f): A^k \rightarrow B$. Запишем перестановку $\sigma \in \Sigma_k$ в виде произведения попарно непересекающихся циклов $\gamma_1 \cdots \gamma_r$, включая и циклы длины 1. Положим $f_\gamma(a_1, \dots, a_k) = f(a_{i_1} \cdots a_{i_q})$ для цикла $\gamma = (i_1, \dots, i_q)$ и $f_\sigma = f_{\gamma_1} \cdots f_{\gamma_r}$. Определим $\Phi_k(f)$ формулой: $\Phi_k(f)(a_1, \dots, a_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f_\sigma(a_1, \dots, a_k)$

Определение 1. Линейное отображение $f: A \rightarrow B$ называется п-гомоморфизмом Фробениуса (кратко п-гомоморфизмом), если $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$ и $f(1) = n$.

Замечание. 1-гомоморфизм – это обычный гомоморфизм алгебр.

Как показано в [2], сумма п- и m-гомоморфизма является (п+m)-гомоморфизмом.

Теорема 1. Любой п-гомоморфизм $f: A \rightarrow C$ (комплексные числа) однозначно с точностью до перестановки слагаемых разлагается в сумму 1-гомоморфизмов.

В случае, когда A – конечнопорожденная алгебра, это было доказано ранее в [2]. Теорема о композиции п-гомоморфизмов доказана в [4] в предположении, что D – алгебра функций. Мы снимаем это условие.

Теорема 2. Пусть $f: A \rightarrow B$ – п-гомоморфизм, $g: B \rightarrow D$ – m-гомоморфизм. Тогда $g \circ f: A \rightarrow D$ – pm-гомоморфизм.

Пусть X, Y – вполне регулярные пространства, $C(X)$ и $C(Y)$ – алгебры всех непрерывных комплекснозначных функций на X и Y . $\nu X \supset X$ – расширение Hewitt'a пространства X , следовательно $C(X) = C(\nu X)$. Обозначим через $\Phi_n(C(\nu X), C(Y))$ множество всех п-гомоморфизмов из $C(\nu X)$ в $C(Y)$. Пусть $\text{Sym}^n \nu X = (\nu X)^n / \Sigma_n$ – n-ая симметрическая степень пространства νX и $L(C_c(\nu X), C_c(Y))$ – пространство линейных непрерывных операторов между локально-выпуклыми пространствами $C_c(\nu X)$ и $C_c(Y)$.

Следующий результат дает решение известной задачи об алгебраическом описании топологического пространства отображений Y в $Sym^n \nu X$.

Теорема 3. Существует каноническая биекция $\Psi : \Phi_n(C(\nu X), C(Y)) \rightarrow C(Y, Sym^n \nu X)$. Более того, $\Phi_n(C(\nu X), C(Y)) \subset L(C_c(\nu X), C_c(Y))$ и Ψ – гомеоморфизм, если в $C(Y, Sym^n \nu X)$ взять компактно-открытую топологию, а в $\Phi_n(C(\nu X), C(Y))$ индуцированную топологию поточечной сходимости из $L(C_c(\nu X), C_c(Y))$.

Литература

1. В.М. Бухштабер, Е.Г. Рис, k -характеры Фробениуса и n -кольцевые гомоморфизмы, УМН Т. 52 (1997), no. 2, 159-160.
2. V.M. Buchstaber, E.G. Rees, The Gelfand map and symmetric products, Selecta Math. (N.S.) 8 (2002), no. 4, 523-535.
3. Д.В. Гугнин, О непрерывных и неприводимых n -гомоморфизмах Фробениуса, УМН Т.60 (2005), no. 5, 163-164.
4. V.M. Buchstaber, E.G. Rees. Frobenius n -homomorphisms and branched coverings, www.maths.ed.ac.uk/~elmer

Об аналогах стохастических ДУ с расширенным симметричным интегралом

Е. В. Гапечкина.

Уфимский государственный авиационный технический университет

Известно [2]-[3], что расширенный симметричный интеграл является пределом симметричных интегралов при определенном виде аппроксимации подынтегральных выражений. Расширенный симметричный интеграл возникает в обобщенной формуле Ито (см.[3]) поэтому рассмотрение СДУ является актуальной задачей.

Используя отличное от рассмотренного в [1] представление функции $f(s)$ получена формула, связывающая расширенный симметричный и симметричный интегралы(см. [2]-[3]):

$$(E) \int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{m(s,t)}^{X(s)} a'_s(s, \varphi(s, u)) du - \int_{X(s)}^{M(s,t)} a'_s(s, \varphi(s, u)) du \right) ds.$$

Показано, что решение детерминированного аналога стохастического дифференциального уравнения

$$\eta(t) - \eta(0) = (E) \int_0^t a(s, X(s), \eta(s)) * dX(s) + \int_0^t b(s, X(s), \eta(s)) ds,$$

где первый интеграл есть расширенный симметричный интеграл по непрерывной функции $X(s)$, $s \in [0, T]$, обладающей локальным временем $\alpha(t, u)$, $t \in [0, T]$, $u \in R$, непрерывным по t при п.в. u , ищется в виде $\eta(s) = \varphi(s, X(s) + C(s))$, где $\varphi(s, u)$ – гладкая детерминированная функция, а $C(s)$ - гладкая функция. Тогда решение сводится к цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \varphi(s, u) = a(s, \varphi(s, u)), \\ \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, X(s) + C(s)) = b(s, \varphi(s, X(s) + C(s))) + \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{m(s,t)}^{X(s)} a'_s(s, \varphi(s, u)) du - \int_{X(s)}^{M(s,t)} a'_s(s, \varphi(s, u)) du \end{array} \right\}$$

с начальным условием $\varphi(0, X(0)) = \eta(0)$.

[1]. Гапечкина Е.В. стохастических дифференциальных уравнениях с расширенным симметричным интегралом. // *Труды XXVII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова*. 2005. – С. 22..

[2]. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений. // *Вестник УГАТУ*. 2004. Т. 4, № 4. С. 55-66.

[3]. Насыров Ф.С. Обобщенная формула Ито и потраекторные итовские интегралы. // *Вестник УГАТУ*. 2005. Т.6, № 1(12). С. 33-40.

О решении детерминированных аналогов систем стохастических дифференциальных уравнений

О. В. Захарова.

Уфимский государственный авиационный технический университет

Рассмотрим детерминированный аналог системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\eta^j(t) - \eta^j(0) = \sum_{k=1}^m \int_0^t a_k^j(s, \eta^1(s), \dots, \eta^n(s)) * dw_k(s) + \int_0^t b^j(s, \eta^1(s), \dots, \eta^n(s)) ds, \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

где $(w_1(s), \dots, w_m(s))$ - многомерный винеровский процесс с независимыми

компонентами, а интегралы $\int_0^t a_k^j(s, \eta^1(s), \dots, \eta^n(s)) * dw_k(s)$ понимаются как симметричные

интегралы по произвольным непрерывным функциям неограниченной вариации.

Решение системы (1) ищем в виде $\eta^j(s) = \phi^j(s, X_1(s), \dots, X_m(s))$. Показано, что если коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial v_i} a_k^j = \frac{\partial}{\partial v_k} a_i^j, \quad \frac{\partial}{\partial v_i} b^j = \frac{\partial}{\partial s} a_i^j, \quad j = 1, \dots, n; k, i = 1, \dots, m$$

то можно обобщить подход, предложенный в [2]-[3], и свести решение системы (1) к решению системы уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} d\phi^j(s, v_1, \dots, v_m) = \\ = \sum_{k=1}^m a_k^j(s, \phi^1(s, v_1, \dots, v_m), \dots, \phi^n(s, v_1, \dots, v_m)) dv_k + b^j(s, \phi^1(s, v_1, \dots, v_m), \dots, \phi^n(s, v_1, \dots, v_m)) ds, \\ k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

с начальными условиями $\phi_i(0, X_1(0), \dots, X_m(0)) = \eta^j(0)$, которую можно решить используя метод предложенный в [1].

[1]. Гюнтер Н. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных // М.: ОНТИ, 1934.

[2]. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике. // Труды МИАН. 2002. Т.~237, №~4. С.~265-278.

[3]. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений. // Вестник УГАТУ. 2004. Т.~4, №~4. С.~55-66.

Расчет гомеоморфизмов многоугольников с изоморфными базовыми скелетами.

Петрова Людмила Григорьевна, Местецкий Леонид Моисеевич

Студентка

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: ludmila.petrova@gmail.com

Известно, что две односвязные замкнутые области топологически эквивалентны, то есть существует непрерывное взаимно однозначное отображение точек одной области в точки другой. Рассматривается задача конструктивного построения такого гомеоморфизма для приложений в компьютерной графике и обработке изображений. Например, при анимации нужно закрасить изменяющийся силуэт человека по заданному эталону. При этом необходимо, чтобы получаемый образ не искажал содержательный смысл объекта. Например, в формируемом образе лицо не должно попасть в силуэт конечностей, руки и ноги не должны перепутаться.

Предложенный авторами алгоритм рассчитан на "сходные" содержательно объекты. Для пары таких объектов можно найти изоморфные подграфы их скелетов, например, базовые скелеты [1] и построить гомеоморфное отображение для их округлений.

Округлением многоугольника по подграфу скелета назовем фигуру на плоскости, полученную объединением всех вписанных максимальных кругов с центрами на подграфе скелета.

Идея отображения с сохранением содержательного смысла основана на том, что изоморфные скелеты можно перевести гомеоморфно друг в друга. Скелеты двух округлений одинаковым образом разбиваются на вложенные последовательности подграфов. Для каждого подграфа строится округление исходных многоугольников и гомеоморфное отображение построенных округлений.

Пусть D^1 и D^2 - два многоугольника на плоскости. Q - гомеоморфизм $Q: D^1 \rightarrow D^2$.

G^1 и G^2 - скелеты областей D^1 и D^2 , G_i^1 и G_i^2 - подграфы скелетов G^1 и G^2 .

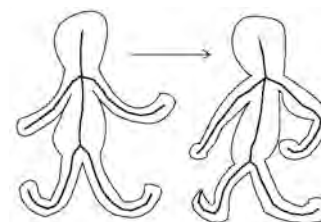


Рис. Области с изоморфными базовыми скелетами

F_i^1 и F_i^2 - округления многоугольников D^1 и D^2 по подграфам G_i^1 и G_i^2

Алгоритм построения гомеоморфизма:

- Построение скелетов G^1 и G^2 для многоугольников D^1 и D^2 соответственно.
- Разложение скелетов на последовательность вложенных подграфов: $G_1^1 \subset G_2^1 \subset \dots \subset G_N^1 = G^1$ и $G_1^2 \subset G_2^2 \subset \dots \subset G_N^2 = G^2$. При этом $G_i^1 \cong G_i^2$, то есть для всех $i=1,2,\dots,N$ соответствующие подграфы скелетов двух многоугольников изоморфны, а $G_i^1 \setminus G_{i-1}^1$ и $G_i^2 \setminus G_{i-1}^2$ являются цепочками
- Построение округления многоугольников D^1 и D^2 по цепочкам G_1^1 и G_1^2 .
- Построение правила гомеоморфного отображения округления F_1^1 на $F_1^2: F_1^1 \rightarrow F_1^2$
- Врезка цепочек $G_i^1 \setminus G_{i-1}^1$ и $G_i^2 \setminus G_{i-1}^2$ в округления F_{i-1}^1 и $F_{i-1}^2, i=2,\dots,N$
- Отображение округленных областей F_{i-1}^1 на $F_{i-1}^2, F_i^1 \rightarrow F_i^2, i=2,\dots,N$

Литература

1. Местецкий Л.М., Рейер И.А. Непрерывное скелетное представление изображения с контролируемой точностью. Труды 13 межд. конф. ГРАФИКОН-2003, Москва, с. 246-249.

Оптимизация расписания для многопроцессорных машин.

Алкадарский Селим Алискендерович²

студент 4 курса математического факультета

Дагестанский государственный университет, Республика Дагестан, Россия

E-mail: selim-web@yandex.ru

В представленной работе предлагается псевдополиномиальный алгоритм решения NP-полной задачи оптимизации расписания для многопроцессорных машин по временному критерию.

Формулировка задачи. Пусть n и m - заданные натуральные числа (n – количество независимых заданий, m – количество процессоров). В множестве A , состоящем из n «неделимых» элементов с заданными целыми положительными стоимостями a_i ($i=1,2,\dots,n$) обозначающими время на выполнение i -го задания, требуется выделить семейство $B = \{B_1, \dots, B_m\}$ из m непересекающихся подмножеств, где сумма величин элементов, включенных в j -ое подмножество, равно натуральному значению b_j и удовлетворяющих условию:

$$\left| \sum_{a_i \in B_k} a_i - \sum_{a_j \in B_l} a_j \right| \rightarrow \min$$

Схема решения задачи. Предлагаемый алгоритм состоит из двух стадий: на первой стадии в результате заполнения таблицы T минимизируется наибольшая достижимая сумма элементов, включаемых в подмножества семейства B ; на второй стадии тот же массив T используется для генерации этих подмножеств. Алгоритм решения задачи основан на принципах динамического программирования и из доказательства алгоритма

² Автор выражает признательность доценту, к.ф.-м.н. Якубову А.З. за помощь в написании тезисов.

выделена вычислительная схема позволяющая за приемлемое время решить задачу оптимизации расписания.

Для большинства значений a_i - продолжительности выполнения заданий встречающихся на практике алгоритм ведет себя как линейный. Псевдополиномиальность алгоритма обусловлена, тем что таблица T становится слишком громоздкой для больших значений a_i .

Литература

1. Гэри, М; Джонсон (1982) Вычислительные машины и труднорешаемые задачи //М.: Мир.

Схема расчета скорости для метода «вихрь в ячейке» применительно к моделированию двумерного ламинарного пограничного слоя

Никонов Валерий Владимирович

научный сотрудник

Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

E-mail: v_nikonov@mail.ru

Предлагается новая схема вычисления скорости в методе «вихрь в ячейке». На каждом шаге по времени процессы конвекции, диффузии в свободном потоке и с поверхности обтекаемого тела рассматриваются отдельно. Основная идея предлагаемой схемы, названной как метод расщепления завихренности (МРЗ), заключается в рассмотрении независимо друг от друга частных производных скорости, входящих в определение завихренности в двумерном случае. Кроме того, применяется интегрирование с разными шагами по времени по причине разности скоростей протекания процессов диффузии и конвекции. В качестве тестовой задачи используется прямое численное моделирование ламинарного пограничного слоя на плоской пластине в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Профили скорости, полученные с помощью новой схемы, сравниваются с решением Блазиуса и результатами других авторов. Показано, что схема МРЗ позволяет получать результаты с достаточной точностью в диапазоне изменения чисел Рейнольдса от 10 до 10^6 .

Литература

1. Taranov A., Kornev N., Leder A., Development of the Computational Vortex Method for Calculation of Two-Dimensional Ship Sections with Flow Separation, *Schiffbauforschung*, 39, 2000, 2, pp. 95-105.
2. Nakamura H., Kamemoto K., Igarashi T., Analysis of unsteady heat transfer in the wake behind a circular cylinder in a uniform flow by a vortex and heat element method, Proceedings of the Second International Conference on Vortex Methods, Sept. 26-28, Turkey, 2001, pp. 235-242.
3. Никонов В.В., Шахов В.Г., Модификация схемы «донор-акцептор» для расчета диффузии завихренности и ее применение в методе «вихрь в ячейке», Вестник СГАУ, № 1 (3), Самара, 2003, с. 38-46.
4. Basin M., Kornev N., Beruecksichtigung der Reibung in der Wirbelmethode, *ZAMM*, 78, 1998, 5, pp. 335-344.
5. Nikonov V., Kornev N., Leder A., The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods, *Schiffbauforschung*, 2002, vol. 41, N 3/4. pp. 5-12.

6. Cottet G.-H., Koumoutsakos P., Vortex methods: theory and practice, Cambridge University Press, 2000, 320 p.
7. Григорьев Ю.Н., Вишиков В.А., Численные методы «частицы-в-ячейках», Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000, 184 с.
8. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем. Г.А. Вольперта, под. ред. Лойцянского Л.Г., М.: Наука, 1974, 712 с.
9. Wu J.C., Numerical boundary conditions for viscous flow problems, AIAA Journal, 14, 1976, pp. 104-1049.
10. Ota S., Kamemoto K., Study on higher resolution of vorticity layer over a solid boundary for vortex methods, Proc. of The Second Intern. Conf. on Vortex Methods, Istanbul, Turkey, September 26-28, 2001, pp. 33-40.

Минимальные неголономные поверхности вращения

Васильева Оксана Владимировна

Аспирант

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: vov23@mail.ru

Пусть в области $G \subset E_3$ задано двумерное гладкое распределение [1] (M, π_2) . Это распределение задается уравнением Пфаффа

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0, \quad (1)$$

множество интегральных кривых которого называют неголономной поверхностью [2] в случае, когда это уравнение не является вполне интегрируемым. Плоскость π_2 называется касательной плоскостью неголономной поверхности в точке M , а прямая, проходящая через M , ортогонально плоскости π_2 , – нормалью неголономной поверхности.

Неголономной поверхностью вращения называют [3] такую неголономную поверхность, все нормали которой пересекают неподвижную прямую (ось вращения). Через каждую точку неголономной поверхности вращения проходят две линии кривизны 2-го рода. Одна из них является плоской линией, которая лежит в плоскости, проходящей через ось вращения, и называется меридианом, а вторая линия в общем случае не плоская, лежит на двумерной сфере и называется параллелью.

Неголономная поверхность называется минимальной, если в каждой ее точке ее средняя кривизна [4] равна нулю. В случае полной интегрируемости уравнения (1) меридианами являются цепные линии, в неголономном же случае они, вообще говоря, – некоторые плоские линии, а в точках параллели минимальной неголономной поверхности вращения полная кривизна 2-го рода постоянна. Через каждую точку M минимальной поверхности вращения проходят точно две асимптотические линии.

Доказана теорема существования неголономных поверхностей вращения. Широта класса – одна функция двух аргументов.

Геометрия неголономной поверхности тесно связана с геометрией векторного поля, состоящего из единичных векторов нормалей. Доказано, что с произволом в две функции одного аргумента существуют минимальные неголономные поверхности вращения, для которых линиями тока векторного поля нормалей являются окружности.

Исследована геометрия таких минимальных неголономных поверхностей вращения.

Литература

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения - М. Наука. - 1979. - С. 683.
2. Роговой М.Р. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в n -мерном пространстве.// Укр. геом. журнал. – 1968. – № 5–6. – С. 126-138
3. Синцов Д. М. Работы по неголономной геометрии. – Киев: Вища школа, 1972.
4. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. – М.: Наука, 1990, 206 с.

**Бесконечно малые изгибания обобщенного скольжения поверхности
положительной внешней кривизны в конформно-евклидовых пространствах**

Кульчинская Екатерина Александровна

студент V курса физико-математического факультета

Таганрогского государственного педагогического института, Таганрог, Россия

Данная работа посвящена изучению бесконечно малых изгибаний регулярных поверхностей положительной внешней кривизны с гладким краем при условии, что край поверхности при изгибании поверхности подчинен внешней связи. Сходная задача для поверхностей положительной гауссовой кривизны в евклидовом пространстве рассматривалась в работе [1].

Пусть V^3 – трехмерное риманово пространство с внутренними координатами (x, y, z) и метрикой $ds^2 = E(z)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, $E(z) > 0$. Пусть F^2 – поверхность в пространстве V^3 с краем ∂F^2 . Рассмотрим бесконечно малые изгибания поверхности F^2 с изгибающими полями $\{\xi, \eta, \zeta\}$ такие, что $\zeta = \sigma$ вдоль края ∂F^2 , где σ – заданная функция. Такие бесконечно малые изгибания поверхности F^2 будем называть изгибаниями обобщенного скольжения.

Теорема: Пусть F^2 – односвязная поверхность, заданная уравнением $f(x, y), (x, y) \in D$, где D – некоторая область с краем ∂D . Будем считать, что $f(x, y) \in C^{4,\alpha}(D + \partial D)$, $\partial D \in C^{3,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и поверхность F^2 имеет положительную вплоть до края внешнюю кривизну $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$. Тогда для любой заданной функции σ класса $C^{3,\alpha}(\partial D)$ поверхность F^2 допускает нетривиальные класса $C^{3,\alpha}(D + \partial D)$ бесконечно малые изгибания обобщенного скольжения, зависящие точно от трех вещественных параметров.

Следствие. Если край поверхности F^2 в пространстве Лобачевского с метрикой $ds^2 = z^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, $z > 0$, лежит на эквидистантой поверхности $z = const$, то поверхность F^2 , подчиненная вдоль края втулочной связи с втулкой $z = const$, допускает точно 3 линейно независимых бесконечно малых изгибания скольжения по втулке.

Доказательство теоремы сводится к изучению следующей краевой задаче:

$$\lambda_x = \sqrt{gb_{11}}\xi, \lambda_y + \mu_x = 2\sqrt{gb_{12}}\xi, \mu_y = \sqrt{gb_{22}}\xi \text{ в области } D, \quad (1)$$

где $\lambda = \xi + p\zeta$, $\mu = \eta + q\zeta$, $p = f_x$, $q = f_y$, $g = \frac{1}{E}(1 + p^2 + q^2)$, b_{ij} – коэффициенты II квадратичной формы поверхности

$$\zeta = \sigma \text{ на } \partial D. \quad (2)$$

Краевая задача (1), (2) эквивалентна краевой задаче относительно функции λ :

$$b_{11}\lambda_{xx} + 2b_{12}\lambda_{xy} + b_{22}\lambda_{yy} + A\lambda_x + B\lambda_y = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_x = \sigma \text{ на } \partial D. \quad (4)$$

В силу сделанных предположений относительно регулярности поверхности, положительности ее внешней кривизны, а так же регулярности области D и функции σ , показывается, что решение задачи (3), (4) принадлежит классу $C^{3,\alpha}(D + \partial D)$ и зависит от двух вещественных постоянных. Зная функцию λ , в силу односвязности области D из системы (1) восстанавливаем функции μ, ζ класса $C^{3,\alpha}(D + \partial D)$ с точностью до произвольной постоянной, что и доказывает теорему.

Список литературы.

1. А.В. Погорелов Внешняя геометрия. – М.: Наука, 1969.

Корректность краевых задач для сингулярных параболических уравнений переменного типа

Туласынов Михаил Станиславович

аспирант

*Институт математики и информатики, Якутский государственный университет
им. М.К. Амосова, Якутск, Республика Саха (Якутия), Россия*

E-mail: sakhane@mail.ru

В области $Q = (-\infty, \infty) \times (0, T)$ рассматривается сингулярное параболическое уравнение с меняющимся направлением времени

$$u_t \cdot \operatorname{sgn} y = u_{yy} + \frac{k}{y} u_y, \quad (1)$$

где $|k| < 1$.

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гельдера $H_k^{p,p/2}(Q)$, $p = 2l + \gamma$, $l \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0,1)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(y,0) = \varphi_1(y), y > 0, u(y,T) = \varphi_2(y), y < 0, \quad (2)$$

условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} u(-0,t) \\ D_y u(-0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(+0,t) \\ D_y u(+0,t) \end{pmatrix}, 0 < t < T, \quad (3)$$

где a_{ij} – данные действительные постоянные, $D_y u = |y|^k \frac{\partial u}{\partial y}$.

Случай единичной матрицы склейки был рассмотрен в монографии Терсенова С.А. [1], где разрешимость сводилась к разрешимости сингулярного интегрального уравнения. Отметим работы [2]-[4], в которых были рассмотрены подобные задачи.

В данной работе показано, что поставленная задача имеет единственное решение при выполнении условий

$$a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21} > 0, \quad a_{11} \cdot a_{21} \leq 0, \quad a_{12} \cdot a_{22} \leq 0. \quad (4)$$

Получены в явном виде $2l$ условия разрешимости. Если обозначить эти условия разрешимости так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 2l, \quad (5)$$

то доказана:

Теорема: Пусть $\varphi_i(x) \in H^p(-\infty, \infty)$, $i = 1, 2$ и выполнены условия (4). Тогда при выполнении $2l$ условий (5) существует единственное решение поставленной задачи из пространства $H_k^{p,p/2}(Q)$.

Литература

1. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985, 105 с.
2. Popov S. V. On a boundary value problem for a singular parabolic equation with changing time direction // Mat. Zametki YaGU, 1994, V.1, №1, P.113-128.
3. Попов С. В., Шахурдин К. А. Разрешимость краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением времени. // Мат. заметки ЯГУ, Якутск: 1997, Т.4, № 2, С. 49-55.
4. Туласынов М. С. Краевые задачи для сингулярных параболических уравнений с меняющимся направлением времени с весовыми условиями склеивания // Мат. Заметки ЯГУ, Т. 11, , вып. 1, 2004, С. 107-115.

Асимптотические представления решений одного существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

Харьков Виталий Михайлович

аспирант 1 года обучения

Одесский Национальный Университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

E-mail: kharkov_v_m@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y'' = \alpha p(t) \varphi(y), \quad (1)$$

где $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) – непрерывная функция, $\varphi : I \rightarrow]0, +\infty[$ (I – левая или правая окрестность y_0 , $|y_0| \leq +\infty$) – дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi'(y) \neq 0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)} = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2)$$

для которого исследуется вопрос об асимптотическом поведении решений в левой окрестности точки ω .

В случае, когда функция $\varphi(y)$ «близка» к степенной, либо равна $e^{\alpha y}$, данная задача была подробно изучена в [1]-[3]. Нашей целью было получение необходимых и достаточных условий существования правильных и сингулярных $\bar{P}_\omega(\lambda)$ -решений уравнения (1) в случае нелинейности более общего вида.

Определение. Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[a_y, \omega]$, будем называть $\bar{P}_\omega(\lambda)$ -решением, если функция $z(t) = \varphi(y(t))$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t \rightarrow \omega} z^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & (k = \overline{0,1}), \\ +\infty; & \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow \omega} \frac{z''(t)z(t)}{z'^2(t)} = \lambda.$$

Положим

$$A = \begin{cases} a, \int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau = +\infty, \\ \omega, \int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau < +\infty; \end{cases} \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, \int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau = +\infty, \\ t - \omega, \int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau < +\infty; \end{cases} \quad \rho = \text{sign } \varphi'(y), \quad z_0 \in \varphi(I).$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема. Для существования y уравнения (1) $\bar{P}_\omega(\lambda)$ -решений, где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, \gamma, 2\gamma - 1\}$, необходимо и достаточно выполнения условий:

$$1) \alpha\rho(\lambda - \gamma) > 0, \quad 2) \lim_{t \rightarrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\sqrt{p(t)}}{\int_A \sqrt{p(\tau)} d\tau} = \frac{\gamma}{2(\lambda - 1)}, \quad 3) \int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau \text{ и } \int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|}}$$

сходятся или расходятся одновременно. Более того, каждое такое решение допускает при $t \rightarrow \omega$ асимптотические представления

$$\varphi'(y(t)) = \frac{\lambda - \gamma}{\alpha(1 - \lambda)^2 \pi_\omega^2(t) p(t)} [1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha(1 - \lambda)\pi_\omega(t)p(t)}{\lambda - \gamma} [1 + o(1)].$$

Литература.

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.
2. Евтухов В. М., Кирилова Л. А. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 8. С. 1053-1061.
3. Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н. // Nonlinear oscillations. - 2002. - Т. 5. № 3. Р. 306 - 325.

Теоремы типа Мореры на гиперболической плоскости

Силенко Виктория Евгеньевна

научный сотрудник

Донецкий государственный университет экономики и торговли, Донецк, Украина

E-mail: V.Silenko@bk.ru

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, G – группа конформных автоморфизмов D . Разложение Ивасава группы G имеет вид $G = KAN$, где $K = \text{SO}(2)$,

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad N = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{см. [1, с. 92]}).$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f \in C(D)$ и для некоторой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\gamma \in D$ и всех $g \in G$ выполнено $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Следует ли отсюда, что f голоморфна в D ? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [2–4]), но при

некоторых дополнительных предположениях голоморфность f имеет место. Одним из таких предположений является условие $f \in L^2(D)$, полученное Аграновским М.Л. в [5, теорема 1]. Это условие, являясь весьма общим, неточно для некоторых конкретных контуров. Например, если γ – окружность, неулучшаемые условия получены Волчковым В.В. (см. [3, теорема 1]).

В данной работе приведены точные условия на рост функции в случае, когда γ – граница гиперболического прямоугольника $Q_\alpha = \{z = n_s a_t \circ 0 : 0 \leq s \leq \alpha, 0 \leq t \leq 1\}$ ($\alpha > 0$). Аналогичная задача решена также для одного и двух гиперболических четырехсторонников $K_\alpha = \{z = a_t n_s \circ 0 : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq \alpha\}$.

Для $l \in \mathbb{N}$, $z \in D$ обозначим $\lambda_l(z) = \frac{e^{2l}(1-|z|^2) - (1+|z|^2-2z)}{e^{2l}(1-|z|^2) + (1+|z|^2-2\bar{z})}$, $m(z) = (1-|z|^2)^2$.

Теорема. Пусть функция $f \in C(D)$ удовлетворяет условиям:

- 1) для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и всех $g \in NA$ $\int_{\partial(gQ_{\alpha_1})} f(z) dz = \int_{\partial(gQ_{\alpha_2})} f(z) dz = 0$;
- 2) для каждого $z \in D$ $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |(f \cdot m)(n_u a_v \circ \lambda_l(z))| dudv = o(1)$ при $l \rightarrow +\infty$, $l \in \mathbb{N}$.

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, или $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |(f \cdot m)(n_u a_v \circ z)| dudv = o(1)$ при $z \rightarrow 1$ по орициклам, то $f(z)$ голоморфна в D .

Литература

1. Хелгасон С. (1987) Группы и геометрический анализ. М.
2. Volchkov V.V. (2003) Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers.
3. Волчков В.В. (1993) Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки, т.53, вып.2., с. 30–36.
4. Силенко В.Е. (2001) Новая теорема типа Мореры в единичном круге // Укр. матем. журнал, т.53, №2, с. 278–281.
5. Аграновский М.Л. (1978) Преобразование Фурье на $SL_2(\mathbb{R})$ и теоремы типа Морера // ДАН СССР, 243, № 6, с. 1353–1356.

Фрактальная аппроксимация в пространстве функций с хаусдорфовой метрикой и ее применения в задачах сжатия изображений

Митин Дмитрий Юрьевич³

аспирант

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, механико-математический факультет, Киев, Украина

E-mail: dmitry.mitin@rambler.ru

В классических работах, давших начало фрактальным методам сжатия с потерями (lossy compression) графических данных, были выведены достаточные условия для того, чтобы соответствующий оператор фрактального преобразования, заданный на пространстве подмножеств плоскости или пространстве функций, был оператором

³ Автор благодарит доцента, канд. физ.-мат. наук Н. А. Назаренко, под научным руководством которого выполнялась работа.

сжатия. Позже было показано, что условия сжимаемости фрактального оператора являются слишком ограничительными — алгоритмы фрактальной аппроксимации сходятся и в некоторых случаях, даже когда упомянутые условия не выполнены. Проблема сходимости итераций фрактального отображения и нахождения достаточных (или необходимых и достаточных) условий, которые бы были не слишком ограничительными и в то же время не слишком сложно проверяемыми, остается во многих случаях исследованной лишь частично. Один из предлагаемых обычно подходов заключается в том, чтобы ослабить условие сжимаемости до так называемой эвентуальной сжимаемости (eventual contractivity), т.е. сжимаемости, начиная с некоторой степени, фрактального оператора.

Обозначим через $HC_{\alpha,\Omega}(I)$ множество непрерывных по Хаусдорфу функций f на отрезке $I \subset \mathbf{R}$, для которых их хаусдорфовый модуль непрерывности $\omega_{\alpha}^H(f, \delta) \leq \Omega(\delta)$, где $\Omega(\delta) \downarrow 0$, $\delta \rightarrow +0$. Известно [1], что $(HC_{\alpha,\Omega}(I), h_{\alpha})$ — полное метрическое пространство, где h_{α} — хаусдорфово расстояние между расширенными графиками функций.

Пусть даны отрезки $I, I_1, \dots, I_n, I'_1, \dots, I'_n$, такие, что $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $I'_i \subset I$, и гомеоморфизмы $(\varphi_i(x), \psi_i(x, y))$, $x \in I'_i$, $y \in \mathbf{R}$, $\varphi_i(I'_i) = I_i$, $i = 1, \dots, n$, причем $|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \leq d'_i |x_1 - x_2|$, $|\psi_i(x_1, y_1) - \psi_i(x_2, y_2)| \leq d''_i \rho_{\alpha}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, $x_1, x_2 \in I'_i$, $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$, $\max(d'_i, d''_i) = d_i$, $\rho_{\alpha}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(\alpha^{-1} |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$, $h_{\alpha,J}$ — хаусдорфова метрика на отрезке J , построенная по ρ_{α} .

Положим оператор фрактального преобразования $(T(f))(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x))) \mathbf{1}_{I_i}(x)$, $x \in I$. Рассмотрим замкнутое множество $\mathbf{F} \subset HC_{\alpha,\Omega}(I)$, такое, что $T(\mathbf{F}) \subset \mathbf{F}$. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} d_{i_1} \dots d_{i_k} \gamma_{i_1, \dots, i_k} < 1$, где

$$\gamma_{i_1, \dots, i_k} = \sup_{\substack{f, g \in \mathbf{F} \\ f \neq g}} \left[h_{\alpha, \varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1} \cap \varphi_{i_2}^{-1}(I_{i_2} \cap \dots \varphi_{i_k}^{-1}(I_{i_k})))} (f, g) \cdot (h_{\alpha}(f, g))^{-1} \right].$$

При сделанных предположениях существует единственная с точностью до эквивалентности функция $f_T^* \in \mathbf{F}$, являющаяся неподвижной точкой оператора T . Для любой $f \in \mathbf{F}$ имеем $T^{\circ k} f \rightarrow f_T^*$, $k \rightarrow \infty$. Тем самым приведенное неравенство является условием эвентуальной сжимаемости оператора T .

Литература

1. Sendov Bl. (1996) Mathematical modeling of real-world images // Constructive Approximation, vol. 12, #1, p. 31-65.

Коллективная и наследственная нормальность вполне регулярной топологии раздельной непрерывности

Гриншпон Яков Самуилович

аспирант

Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: grinshpon@mail.ru

Для произвольных вполне регулярных топологических пространств X и Y на их декартовом произведении $X \times Y$ можно определить топологическое пространство

$X \tilde{\otimes} Y$, удовлетворяющее следующим условиям: а) пространство $X \tilde{\otimes} Y$ вполне регулярно; б) для любого вполне регулярного пространства Z отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда $f: X \tilde{\otimes} Y \rightarrow Z$ непрерывно ([1]).

Известно, что во многих случаях пространство $X \tilde{\otimes} Y$ не является нормальным, например, произведение сепарабельных полных метрических пространств без изолированных точек, наделенное топологией раздельной непрерывности, не нормально ([1, 2]). Поэтому большой интерес вызывает нахождение таких пространств X и Y , для которых пространство $X \tilde{\otimes} Y$ обладает свойством нормальности или даже некоторым усилением этого свойства.

В [2] доказано, что нормальность пространства $X \tilde{\otimes} Y$ вытекает из паракомпактности пространств X и Y и разреженности и сильной нульмерности одного из сомножителей X или Y . В данной работе эти результаты обобщены на случай коллективной и наследственной нормальности.

Теорема 1. Пусть X – разреженный сильно нульмерный паракомпакт, Y – паракомпакт. Тогда пространство $X \tilde{\otimes} Y$ коллективно нормально.

Теорема 2. Пусть X – наследственно нормальный разреженный сильно нульмерный паракомпакт, Y – наследственный паракомпакт. Тогда пространство $X \tilde{\otimes} Y$ наследственно нормально.

Также коллективную и наследственную нормальность вполне регулярной топологии раздельной непрерывности удалось исследовать для некоторых непаракомпактных множителей, а именно, для ординалов.

Теорема 3. Пусть λ – ординал и μ – счетный ординал. Тогда пространство $\lambda \tilde{\otimes} \mu$ является коллективно нормальным.

Теорема 4. Пусть ординал λ больше первого несчетного ординала ω_1 , а ординал μ больше первого бесконечного ординала ω_0 . Тогда пространство $\lambda \tilde{\otimes} \mu$ не является наследственно нормальным.

Литература.

1. Knight C. J., Moran W., Pym J. S. The topologies of separate continuity. II// Proceedings of Cambridge Philosophy Society. – 1972. – № 71. – P. 307-319.
2. Гриншпон Я. С. Нормальность вполне регулярной топологии раздельной непрерывности// Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. – С. 27-30.

Графическая сходимост мероморфных функций конечного порядка на компактной римановой поверхности S .⁴

*Буркова Надежда Константиновна*⁵

студентка 5 курса

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия

E-mail: atet@gasu.ru

⁴ Настоящая статья подготовлена по результатам исследований, проведенных в рамках гранта Университеты России (грант 04.01.456).

⁵ Автор выражает признательность доценту к.ф.-м.н. Тетенову А.В. за помощь в подготовке тезисов.

Понятие графической сходимости в семействах отображений является эффективным инструментом для решения задач метрической топологии и теории квазисимметрических отображений [1].

Пусть S – компактная риманова поверхность. Будем говорить, что последовательность мероморфных функций $f_k(z)$ на S *сходится графически*, если для последовательности их графиков $\Gamma(f_k) \subset S \times \bar{C}$ существует топологический предел Γ_0 [2, § 29]. Множество Γ_0 будем называть *графическим пределом* последовательности мероморфных функций $f_k(z)$.

Нами доказывается следующая

ТЕОРЕМА. Пусть S есть компактная риманова поверхность. Пусть $f_k(z)$ – последовательность мероморфных функций порядка $\text{ord}(f_k(z))=n$, имеющая графический предел $\Gamma_0 \subset S \times \bar{C}$;

Тогда, в зависимости от характера сходимости последовательности дивизоров функций $f_k(z)$ множество Γ_0 имеет следующий вид:

$$\text{либо } \Gamma_0 = \{z_1, \dots, z_k\} \times \bar{C} \cup (S \times \{\infty\});$$

либо $\Gamma_0 = \{z_1, \dots, z_k\} \times \bar{C} \cup \Gamma(f_0)$, где $k \leq n - \text{ord}(f_0)$ и f_0 – предельная мероморфная функция для последовательности $f_k(z)$;

либо $\Gamma_0 = \Gamma(f_0)$, где f_0 – предельная мероморфная функция для последовательности $f_k(z)$, имеющая тот же порядок.

Литература

1. Асеев В.В. (1984) О сходимости и устойчивости отображений, ограниченно искажающих модули. // Сибирский математический журнал, Т.25, №1, стр.19-29
2. Куратовский К. Топология, т.1,2 -- М., Мир, 1966, 1969..

О свойствах перестановок рядов специального вида

Лазарева Елена Геннадьевна

сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент

Томский государственный университет, механико-математический факультет,

г. Томск, Россия

E-mail: lazareva-e-g73@mail.ru

Областью сумм ряда $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ в нормированном пространстве E называем (следуя [1]) множество всех таких элементов $x \in E$, что при некоторой биекции $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi(j)}$ сходится к x . В связи с проблемой описания области сумм ряда в бесконечномерном линейном пространстве мы рассматриваем перестановки рядов специального вида. Пусть A, B – бесконечные подмножества натуральных чисел с бесконечными дополнениями (то есть $A, B \in 2^{\mathbb{N}}(\infty, \infty)$). Перестановка $\pi_{AB}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ действует следующим образом: $\pi_{AB}(A) = B$, $\pi_{AB}(\mathbb{N} \setminus A) = \mathbb{N} \setminus B$, причем отображения $\pi_{AB}|_A, \pi_{AB}|_{\mathbb{N} \setminus A}$ сохраняют порядок натуральных чисел.

В работе [2] нами рассмотрена возможность умножения таких перестановок на натуральные числа. Это понятие можно обобщить, определив множество перестановок

$\pi + \sigma$: перестановка δ принадлежит множеству $\pi + \sigma$ тогда и только тогда, когда для любого ряда в любом нормированном пространстве E из условий $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi(j)} = x$, $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)} = y$ ($0, x, y \in E$) следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\delta(i)}$ к элементу $x + y$. Из существования рядов с двухточечной областью сумм [1] вытекает, что такое сложение возможно не всегда, однако для перестановок $\pi = \pi_{AB}$, $\sigma = \pi_{CB}$ мы строим множество $D \in 2^{\mathbb{N}(\infty, \infty)}$ так, что $\delta = \pi_{DB} \in \pi + \sigma$. Множество D определяется неоднозначно, благодаря чему удается доказать: если ι – тождественная перестановка, то при любом выборе множеств $A, B \in 2^{\mathbb{N}(\infty, \infty)}$ перестановка π_{AB} содержится во множестве $\pi_{AB} + \iota$ и найдется множество $C \in 2^{\mathbb{N}(\infty, \infty)}$ такое, что $\iota \in \pi_{AB} + \pi_{CB}$. Кроме того, построенный нами способ сложения позволяет находить разность перестановок: если множество $D \in 2^{\mathbb{N}(\infty, \infty)}$ таково, что $\pi_{DB} \in \pi_{AB} + \pi_{CB}$, то при $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi_{AB}(j)} = x$, $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi_{DB}(j)} = y$ ($0, x, y \in E$) ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi_{CB}(j)}$ сходится к $y - x$.

Множество перестановок \mathbf{Q} называем *достаточным для ряда* $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, сходящегося в нормированном пространстве E , если для каждого элемента x из области сумм этого ряда найдется перестановка $\pi \in \mathbf{Q}$ такая, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi(j)}$ сходится к x . Нами найдено условие, при котором достаточным для ряда является множество перестановок $\left\{ \pi_{AB}, A, B \in 2^{\mathbb{N}(\infty, \infty)} \right\}$. При этом область сумм ряда конечномерна, но размерность ее может быть сколь угодно велика.

Литература

1. Kadets M.I., Kadets V.M. Series in Banach Spaces. Conditional and Unconditional Convergence.- Birkhauser Verlag, 1997.-153 p.
2. Лазарева Е.Г. Исследование области сумм векторного ряда посредством умножения перестановки ряда на вещественные числа // Математические труды, т.4, №1. - 2001г, стр.36-67.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант МК-2803.2005.1

Функции Бесселя, классические ортогональные многочлены и их вычисления с помощью асимптотических формул⁶

*Лариончиков Роман Сергеевич*⁷

кандидат физико-математических наук

Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

E-mail: romanlario@rambler.ru

⁶ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00192

⁷ Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Суегину Павлу Кондратьевичу за внимательное отношение к работе.

С помощью асимптотических формул специальную функцию большого порядка можно вычислить всего за 5-10 арифметических операций.

Для функций Бесселя известна асимптотическая формула [1,2]:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}).$$

Для классических ортогональных многочленов имеют место формулы, содержащие в главном члене асимптотики функции Бесселя [4,5]. Например, для многочленов Якоби при $\alpha > -1$ и фиксированном $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\theta^{-1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos \theta; \alpha; \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \sqrt{2} N^\alpha} J_\alpha(N\theta) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\theta \in \left[\frac{c}{N}, \pi - \varepsilon\right], c = \text{const}, N = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}.$$

ВКБ-метод (WKBJ-method), леммы М.В. Федорюка и теоремы Ф. Олвера порождают асимптотические формулы для специальных функций [3]. В частности, с помощью результата Франка Олвера можно получить формулу для функций Бесселя:

$$J_n(x) = \left(\frac{4\xi(x,n)x^2}{4n^2 - 1 - 4x^2}\right)^{1/4} \left\{ c_{1,n} Ai(\xi(x,n)) + c_{2,n} Bi(\xi(x,n)) + \varepsilon(x,n) \right\} \quad \text{äää}$$

$$\frac{2}{3} \xi^{3/2}(x,n) = i \left[\left(x^2 - \frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2} - \left(\frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2} \operatorname{arctg} \frac{\left(x^2 - \frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2}}{\left(\frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2}} \right], \quad x > \left(\frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2},$$

$$\frac{2}{3} (-\xi)^{3/2}(x,n) = i \left[\left(\frac{4n^2 - 1}{4} - x^2\right)^{1/2} - \frac{\left(\frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2}}{2} \ln \left(\frac{\left(\frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2} + \left(\frac{4n^2 - 1}{4} - x^2\right)^{1/2}}{\left(\frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2} - \left(\frac{4n^2 - 1}{4} - x^2\right)^{1/2}} \right) \right],$$

$$0 < a < x \leq \left(\frac{4n^2 - 1}{4}\right)^{1/2},$$

$c_{1,n}, c_{2,n}$ - коэффициенты, $n \geq 1$, $\varepsilon(x,n)$ - остаточный член формулы.

Литература.

1. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. (1998) Задачи математической физики. Под ред. А.Г. Свешникова, изд-во Московского Университета.
2. Кузьмин Р.О. (1933) Бесселевы функции. ГТТИ, Ленинград-Москва.
3. Лариончиков Р.С. (2003) Некоторые аналоги формулы Планшереля-Ротаха для классических ортогональных многочленов. Дисс. на соискание уч. степени к.ф.-м.н., МТУСИ.
4. Сеге Г. (1962) Ортогональные многочлены. Перевод с англ. ГИФМЛ.
5. Суетин П.К. (в печати) Классические ортогональные многочлены. 3-е издание, ФизМатЛит.

О количестве представлений числа трехклассной бинарной квадратичной формой⁸.**Евсеева Юлия Юрьевна**

ассистент

Владимирский государственный педагогический университет

физико-математический факультет

г. Владимир Россия

E-mail: ula_79@rambler.ru

Задача о представлении числа бинарной положительно определенной квадратичной формой впервые была рассмотрена Гауссом. Подробная история изучения бинарных квадратичных форм изложена в известной монографии Диксона [1].

В случае одноклассной бинарной квадратичной формы задача решена полностью [2]. В случае неодноклассных форм рассматривалась преимущественно задача о представлении чисел данными формами [3]

В данной работе на основе метода Журавлева В.Г. [4] получены формулы для количества представлений чисел произвольной трехклассной бинарной квадратичной формой.

ТЕОРЕМА: Пусть f_0, f_1, f_2 – квадратичные формы из различных классов трехклассного мнимого квадратичного поля дискриминанта D_1 , f_0 представляет 1 и $r(f_i, m)$ – число решений уравнения $f_i(x, y) = m$ в целых числах $x, y \in \mathbb{Z}$. Тогда имеют место следующие формулы

$$r_0(f_0, m) = \frac{2}{3}(\hat{\chi}_0(m) + 2\hat{\chi}_1(m)) \quad r_1(f_1, m) = r(f_2, m) = \frac{2}{3}(\hat{\chi}_0(m) - \hat{\chi}_1(m))$$

где $\hat{\chi}_i$ - вполне мультипликативная функция определяемая формулами

$$\hat{\chi}_0(m) = \rho(m) = \sum_{\delta|m} \chi_1(\delta)$$

$$\hat{\chi}_1(p^\alpha) = \rho(p^\alpha) \text{ для } \chi_1(p) = -1, 0 \text{ или } \chi_1(p) = +1 \text{ и } \chi_1(p) = +1$$

$$\hat{\chi}_1(p^\alpha) = \varepsilon(\alpha) \text{ для } \chi_1(p) = +1 \text{ и } \chi_1(p^\alpha) = \rho(p^\alpha).$$

$$\chi_1(p) = \begin{cases} 1, r(f_0, p) > 0 \\ -1, r(f_1, p) > 0 \end{cases}$$

$$\rho(p^\alpha) = \alpha + 1 \text{ для } \chi(p) = +1, \quad \rho(p^\alpha) = 1 \text{ для } \chi(p) = 0$$

$$\rho(p^\alpha) = \begin{cases} 1, \alpha \equiv 0 \pmod{3} \\ 0, \alpha \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \text{ для } \chi(p) = -1,$$

$$\chi(p) - \text{характер квадратичного поля [2], } \varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 1, \alpha \equiv 0 \pmod{3} \\ -1, \alpha \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, \alpha \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Литература:

⁸ Работа выполнена при финансировании РФФИ грант № 05-01-00435

1. Dicson L.E. History of the theory of numbers, vol.3, Quadratic and higher forms, N.Y.1992, p.313
2. Борович З.И., Шафаревич И.Р., *Теория чисел*, М, 1984.с.504
3. Buel D.A. Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations, N.Y.,1989, p.247
4. Журавлев В.Г. *Элементарная теория Гекке*, Владимир, 1988, с.28

О представлениях натуральных чисел при помощи чисел Фибоначчи.⁹

Шутов Антон Владимирович.

сотрудник университета

Владимирский государственный педагогический университет, Владимир, Россия.

E-mail: shutov@vgpu.vladimir.ru

Пусть $\{f_i\}$ – последовательность чисел Фибоначчи, определяемая соотношениями $f_1=f_2=1$, $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$. Рассмотрим множество $FP(n)=\{\Pi(n):n=\sum_{i \geq 1} n_i f_i, n_i \in \mathbb{Z}\}$

представлений натурального числа n в виде сумм и разностей чисел Фибоначчи, а также множество $FP^+(n)=\{\Pi(n) \in FP(n), \text{ все } n_i \geq 0\}$ разбиений числа n на слагаемые, равные числам Фибоначчи. Для каждого представления $\Pi(n):n=\sum_{i \geq 1} n_i f_i$ определим его норму

$|\Pi(n)|_F = \sum_{i \geq 1} n_i$. Представление $\Pi(n)$ будем называть минимальным (положительно-

минимальным), если $|\Pi(n)|_F \leq |\Pi'(n)|_F$ для всех $\Pi'(n) \in FP(n) (\Pi'(n) \in FP^+(n))$. Рассмотрим задачу построения таких представлений.

Пусть $\Pi_{gr}(n)$ – разложение числа n в систему счисления Фибоначчи, построенное по жадному алгоритму [1]. Это разложение определяется условиями: все $n_i=0$ или 1, $n_i n_{i+1}=0$.

Теорема 1. Представление $\Pi_{gr}(n)$ положительно минимально.

Два представления $\Pi_1(m):m=\sum_{i \geq 1} m_i f_i$, $\Pi_2(n):n=\sum_{i \geq 1} n_i f_i$ естественным образом определяют представления $\Pi_1 \pm \Pi_2(m+n): m+n=\sum_{i \geq 1} (m_i \pm n_i) f_i$. Пусть представление

$\Pi_{gr}(n)$ имеет вид $n=\sum_{i=2}^t n_i f_i$. Определим представление $\check{I}_{gr}^*(n) = f_{t+1} - \check{I}_{gr}(f_{t+1} - n)$. Для

$k=1, \dots, t$ определим числа $\alpha_k = \sum_{i=k+1}^t n_i f_i$, $\beta_k = n - \alpha_k$ ($\alpha_1 = n$, $\alpha_t = 0$) и представления

$$\check{I}_k(n) = \check{I}_{gr}(\alpha_k) + \check{I}_{gr}^*(\beta_k).$$

Теорема 2. По меньшей мере одно из представлений $\check{I}_k(n)$, $k=1, \dots, t$ минимально.

Пусть $|n|_F = \min\{|\check{I}(n)|_F: \check{I}(n) \in FP(n)\}$, $|n|_{F^+} = \min\{|\check{I}(n)|_F: \check{I}(n) \in FP^+(n)\}$.

Теорема 3. Справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \min\{n: |n|_{F^+} = t\} &= f_{2t+1} \\ \min\{n: |n|_F = t\} &= \frac{f_{3(t+1)}}{2} \end{aligned}$$

⁹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00435.

Результаты теорем 1–3 могут быть применены к оценке остаточного члена проблемы распределения дробных долей $\{n\tau\}$, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ на множествах ограниченного остатка (проблема Гекке)[2].

Литература.

1. Грехэм Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М., Мир, 1998.
2. Шутов А.В. О распределении дробных долей//Чебышевский сборник, 2004, т.5, вып. 3, 112-121.

О распределении некоторой последовательности по переменному модулю.¹⁰

Красильщиков Василий Вячеславович, Шутов Антон Владимирович.

Студент, сотрудник университета.

Владимирский государственный педагогический университет

физико-математический факультет, Владимир, Россия

E-mail: krasilshchikovvv@mail.ru, shutov@vgpu.vladimir.ru

Для произвольной иррациональности α рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, определяемую по правилу:

$$x_0 = 0,$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, \langle n\alpha \rangle \in (0; 1 - \alpha), \\ x_n + l_2, \langle n\alpha \rangle \in [1 - \alpha; 1), \end{cases}$$

где $\langle \cdot \rangle$ - дробная доля.

Изучается распределение последовательности $\{x_n\}$ по переменному модулю h . В работе [1] для h вида $h = m \frac{l_1(1-\alpha) + l_2\alpha}{l\alpha + k}$, где $m, l, k \in \mathbb{Z}, k^2 + l^2 \neq 0$ была доказана неравномерность рассматриваемого распределения. Для описания этой неравномерности введем функцию $\nu(\varepsilon)$ вида

$$\nu(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k: 0 \leq k < n, \langle x_n \rangle_h \in [0; \varepsilon)\}}{n}.$$

Здесь $\langle \cdot \rangle_h$ - дробная доля по модулю h .

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $l_1 < l_2$. Тогда

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{h_0}, \varepsilon \in [0; h_0), \text{ при } h_0 < h, \\ 1, \varepsilon \in [h_0; h), \end{cases}$$

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} c\varepsilon([\frac{h_0}{h}] + 1), \varepsilon \in [0; \langle h_0 \rangle_h), \\ c([\frac{h_0}{h}]\varepsilon + \langle h_0 \rangle_h), \varepsilon \in [\langle h_0 \rangle_h; h), \end{cases} \text{ при } h_0 > h,$$

$$\nu(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{h}, \text{ при } h_0 = h.$$

$$\text{Здесь } c = \frac{1}{[\frac{h_0}{h}] + \langle h_0 \rangle_h}, \quad h_0 = \frac{l_1(l+k) - l_2k}{l\alpha + k}.$$

¹⁰ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00435.

Теорема 2. Пусть $l_1 > l_2$. Тогда

$$v(\varepsilon) = \begin{cases} 0, \varepsilon \in [0; h - h_0), \\ \frac{\varepsilon - h}{h_0} + 1, \varepsilon \in [h - h_0; h), \text{ при } h_0 < h, \end{cases}$$

$$v(\varepsilon) = \begin{cases} c\varepsilon[\frac{h_0}{h}], \varepsilon \in [0; h - \langle h_0 \rangle_h), \\ c(\varepsilon([\frac{h_0}{h}] + 1) - h + \langle h_0 \rangle_h), \varepsilon \in [h - \langle h_0 \rangle_h; h), \end{cases} \text{ при } h_0 > h,$$

$$v(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{h}, \text{ при } h_0 = h.$$

Здесь c и h_0 такие же, как и в теореме 1.

Литература.

1. Красильщиков В.В., Шутов А.В. *Одномерные квазикристаллы: аппроксимация периодическими структурами и вложение решеток.*// Сборник трудов летней школы по современным проблемам теоретической и математической физики «Волга-2005» (Петровские чтения). Казань, 2005.

ПОДСЕКЦИЯ «МЕХАНИКА»**Математическая модель ауторегуляции течения крови в артерии¹¹****Чернявский Игорь Леонидович¹²***студент**Московский инженерно-физический институт (Государственный университет),
Москва, Россия**E-mail: chernyavsky@mephi.ru*

Математическое моделирование процессов, происходящих в сердечно-сосудистой системе, является важным, поскольку их понимание может помочь в прогнозировании течения многочисленных заболеваний, создании оптимальных искусственных сосудов и лекарств.

Большинство работ по гемодинамике (гидродинамике крови) посвящены анализу и моделированию течения крови в артериях в приближении «пассивной» эластичной или вязкоэластичной трубки [1,2]. Однако для реально происходящих в стенке «активной» артерии физико-химических процессов характерна обратная связь, образуемая за счет реакции мышечного тонуса сосуда на изменение вязкого сдвигового напряжения при течениях крови.

Один из возможных путей учета уникальных особенностей стенки артерии – рассмотрение механизма расширения сосуда под действием оксида азота (NO), выделяемого в эндотелиальном слое клеток стенки, соприкасающихся с потоком крови в артерии [3,4]. Это, так называемый, эндотелий-зависимый фактор расслабления гладких мышц (EDRF), впервые обнаруженный в 1980 году Робертом Фурчготтом [5].

В докладе предлагается двуслойная диффузионно-кинетическая математическая модель ауторегуляции потока крови в артерии при учете возможного изменения концентрации оксида азота от сдвигового напряжения на стенке сосуда. Предполагается, что процесс ауторегуляции управляется изменением уровня концентрации ионов кальция в мышечной ткани сосуда, что приводит к изменению мышечного тонуса и, в конечном результате, к изменению радиуса артерии. Сосуд считается аксиально-симметричным и вязкоэластичным, поток крови полагается квазистационарным, течение крови в сосуде описывается обобщенным законом Гагена-Пуазейля. Сила в мышечном слое предполагается линейно зависящей от концентрации свободных ионов кальция, зависимость концентрации оксида азота от сдвигового напряжения также линейная.

В предельном случае тонкой стенки проведен аналитический анализ модели для описания процесса ауторегуляции. Обсуждается условие устойчивости стационарного решения и влияние вязкости стенки для линейной математической модели. Получено стационарное распределение концентраций оксида азота и ионов кальция. Предлагается достаточное условие устойчивости стационарного решения. В общем случае решение задачи ауторегуляции дается с помощью численных методов. Показано, что при изменении среднего уровня кровотока происходит изменение радиуса сосуда и переход системы в новое равновесное состояние, что согласуется с результатами экспериментальных наблюдений.

¹¹ Настоящая работа проведена в рамках проекта МНТЦ В1213.

¹² Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. Н.А. Кудряшову.

Литература

1. Quarteroni A., Tuveri M., Veneziani A. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods. // *Comp. Vis. Science*, 2000, V.2, P.163-197.
2. Кудряшов Н.А., Чернявский И.Л. Нелинейные волны при течении жидкости в вязкоэластичной трубке. // *Изв. РАН. Мех. жидкости и газа*, 2006, №1, (в печати).
3. Регирер С.А., Шадрин Н.Х. Математические модели транспорта оксида азота в кровеносном сосуде. // *Биофизика*, 2005, Т.50, №3, С.515-536.
4. Rachev A. A model of arterial adaptation to alterations in blood flow. // *J.Elasticity*, 2000, V.61, P.83-111.
5. Furchgott R.F., Zawadzki J.V. The obligatory role of endothelial cells in the relaxation of arterial smooth muscle by acetylcholine. // *Nature*, 1980, V.288, P.373-376.

Приближенные решения задач распространения выбросов отрицательной плавучести¹³

Чмыхов Михаил Александрович¹⁴

аспирант

*Московский инженерно-физический институт (Государственный университет),
Москва, Россия*

E-mail: chmykhov@mephi.ru

Рассматривается задача о распространении выброса отрицательной плавучести из точечного источника. Выбросом называется газовая смесь, в которой могут присутствовать твердые или жидкие аэрозоли с плотностью большей, чем плотность воздуха. Подстилающая поверхность предполагается горизонтальной и шероховатой, создающей сопротивление движению выброса. Сопротивление описывается линейной зависимостью от скорости. Смешивание выброса и окружающего воздуха из-за взаимной диффузии на границе не учитывается. Рассматривается случай осевой симметрии с постоянным потоком в начале координат. Все зависимые переменные системы зависят только от расстояния до источника и времени. Пусть $h(r,t)$ - вертикальная граница выброса, r - расстояние до источника, t - время. Предположим, что слой смога от дна до границы раздела движется с постоянной скоростью $u(r,t)$.

В [1,2] показано, что в пренебрежении инерционными слагаемыми систему уравнений для описания распространения смога можно представить в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u h) = 0 \quad g' \frac{\partial h}{\partial r} + F_r = 0 \quad (1)$$

где F_r - сила сопротивления среды, g' - приведенное ускорение свободного падения.

Учитывая линейный закон сопротивления $F_r = \frac{u g'}{\alpha}$ (где τ' - константа), система (1) имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h \frac{\partial h}{\partial r} \right)$$

¹³ Настоящая работа проведена в рамках проекта МНТЦ (проект В1213).

¹⁴ Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. Н.А. Кудряшову.

В качестве граничного условия в начале координат используется заданный поток

$$2\pi rh(r,t)u(r,t)|_{r=0} = Q$$

Известно, что задача может быть сведена к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения при использовании автомодельных переменных [3,4].

Получены приближенные решения автомодельных задач, описывающие форму поверхности выброса при заданном потоке в начале координат.

Проведено сравнение полученных приближенных решений с численными, построенными методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. Сравнение показало хорошее согласие между приближенными и численными решениями.

Используя полученное решение, определена зависимость фронта выброса от времени. Предложена формула для определения скорости распространения переднего фронта выброса.

Литература

1. Шагапов В.Ш., Галиаскарова Г.Р. О динамике накопления выбросов отрицательной плавучести в безветренную погоду. ИФЖ. 2001. Т.75, №6.
2. Whitham G.V. Linear and Nonlinear Waves, Wiley-Interscience, New-York, 1974.
3. Кудряшов Н.А. Автомодельные задачи движения газов в пористой среде. Москва, МИФИ, 1984
4. Кудряшов Н.А. Приближенное решение одной задачи нелинейной теплопроводности. // ЖВМиМФ, 2005. Т.45. №11. С. 2048-2055.

О некоторых точных решениях в задачах о движении среды Максвелла

Осипов Сергей Владимирович

аспирант

Новосибирский государственный университет

Механико-Математический факультет

г. Новосибирск

E-mail: Osipov@gorodok.net

Данная работа посвящена математическому моделированию и некоторым точным решениям задач о движении дисперсных элементов (твердого, жидкого, газообразного) в неньютоновской жидкости Максвелла, а также задаче о заполнении сферической полости в среде Максвелла (аналог известной задачи Забабахина [1]). Актуальность работы обусловлена тем, что рассматриваемые течения являются одними из главных составляющих механизма неустойчивости структуры эмульсий (капли в жидкой матрице) и суспензий (твердые или газообразные дисперсные элементы в жидкой матрице). Кроме того, такие течения присутствуют в ряде технологических процессов (транспортировка жидкодисперсных элементов по трубам, седиментация или флотация дисперсных элементов в вязкоупругих неньютоновских жидких объемах и др.)

Математически максвелловская модель описывается уравнением состояния вида

$$\tau \frac{\tilde{d}P}{dt} + P = -pI + 2\mu D,$$

где $\frac{\tilde{d}P_{ij}}{dt} = \frac{dP_{ij}}{dt} + \omega_{ik}P_{jk} + \omega_{jk}P_{ik}$, $\omega_{jk} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ - вращательная производная Яумана.

Здесь существенную роль играет величина времени релаксации среды τ , которая

определяет ее поведение и свойства. Если продолжительность эксперимента достаточно мала, то среда Максвелла ведет себя как твердое тело Гука; если продолжительность очень велика, то материал представляет собой ньютоновскую жидкость.

В результате работы найдены точные решения в задаче о нестационарном движении капли максвелловской жидкости в среде Максвелла под действием периодических массовых сил, а также твердого шарика и пузырька газа – под действием монотонных сил. Проведен анализ зависимости скорости дисперсных элементов от времени релаксации и плотности среды, а также от частоты колебаний вынуждающей силы.

В задаче о заполнении сферической полости найдено точное решение в первом приближении. Показано, что линеаризация не позволяет обнаружить два типа решений, подобно найденным в аналогичной задаче Забабахина.

Научный руководитель – член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук В.В.Пухначев.

Литература

1. Забабахин Е.И. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. ПММ, 1960г

Математическая модель

начальной стадии роста популяции мигрирующих клеток.

Решетов Николай Владимирович

Студент 2 курса механико-математического факультета

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: reshetov@yandex.ru

Основной целью работы была разработка модели поведения клеточной популяции, развивающейся на плоском двумерном торе. Модель включает явное представление типичных регуляционных и контрольных механизмов, а именно: 1) контактное ингибирование (межклеточное взаимодействие, возникающее при контакте клеток); 2) пролиферацию клеток; 3) случайную миграцию клеток; 4) направленную миграцию клеток (хемотаксис). Эта биофизическая модель базируется на слежении за жизненным циклом каждой отдельной клетки, описываемым распределением Пуассона, и применима к достаточно большому количеству клеток и богатым локальным правилам их поведения.

Стохастическая имитационная модель написана на языке программирования Object Pascal. Модель работает на плоской решетке-матрице (торе) до заполнения области роста размером до 1000x1000 элементов. При этом отслеживается распределение клеток и фаза жизненного цикла. Результаты моделирования допускают верификацию с использованием экспериментальных данных получаемых с помощью проточной цитометрии, временной микрофотографии и прямого подсчета клеток. Известно, что клеточная миграция и пролиферация играют важную роль в таких физиологических процессах, как заживления ран, рестенозис, etc. Клеточная миграция и кинетика деления играют большую роль в задачах клеточной инженерии и цитотехнологии. Данная модель при изменении правил локального поведения может быть применена для решения задач реструктуризации наноразмерных объектов и исследования диссипативных процессов в изделиях наномеханики, а также анализа ферромагнитных и сегнетоэлектрических материалов.

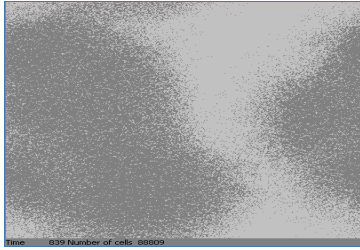


Рис 1.
Пространственное распределение клеток на плоском торе

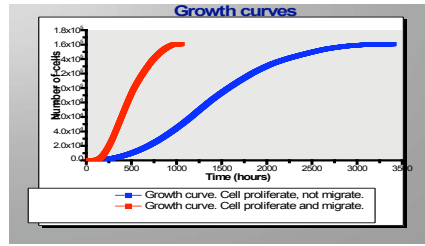


Рис 2.
Ростовые кривые подвижных и неподвижных клеток.

В процессе моделирования были исследованы кинетика численности, пути оптимизации роста числа клеток и влияние характера начальной посадки клеток на скорость роста популяции. Были обнаружены две качественно различные кинетики роста. Первая – это классический экспоненциальный рост с выходом на плато. Вторая кинетика – более медленный рост, который на начальной стадии может быть аппроксимирован квадратичной функцией времени.

Результаты показывают, что клеточная подвижность существенно влияет на скорость клеточного роста. Обнаружено, что существуют оптимальное соотношение между скоростями миграции и деления, приводящее к максимальному темпу клеточного роста.

Основные результаты, представленные в работе:

- Разработана стохастическая двумерная модель клеточного автомата для изучения популяционной динамики.
- Обнаружено два типа кинетики роста, демонстрирующих влияние скорости миграции клеток на популяционный рост.
- Установлено, что максимально быстрый клеточный рост может быть получен при определенном соотношении вероятностей клеточной миграции и деления.

Модель предназначена для предварительного исследования эффективности лекарственных препаратов, влияющих на подвижность и деление клеток.

Работа осуществлена в National University of Ireland, Galway при поддержке фонда UREKA.

Оценка потерь на трение в гидропушке методом исчезающей вязкости

Веремеев Сергей Александрович

студент

Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

E-mail: veremeyev_s@mail.ru

Импульсные струи жидкости высокой и сверхвысокой скорости (1000 м/с и выше) используются в различных технологических процессах, таких как: разрушение негабаритов и бетонных блоков, пробивание и сверление отверстий в породах и твердых материалах, проходка горных выработок, зачистка поверхностей и т.д. Получают такие струи при помощи гидропушки и импульсного водомета. Движение жидкости в этих установках, распространение и взаимодействие импульсной струи с преградой обычно рассматривают без учета вязкости. Оценка сил вязкости, как правило, производится качественно по числу Рейнольдса. В данной работе влияние вязкости на параметры гидропушки и затопленной струи оценивается количественно при помощи метода исчезающей вязкости. Идея метода состоит в том, что вместо идеальной жидкости

рассчитывается течение слабо вязкой жидкости с очень маленьким коэффициентом вязкости. Влияние вязкости оценивается по потерям полного давления для нормальной и слабо вязкой жидкости. Достоинством метода является то, что, уменьшая реальный коэффициент вязкости, можно наглядно проанализировать, как влияет вязкость жидкости на основные гидродинамические параметры гидропушки и импульсной затопленной струи.

Осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости описывалось уравнениями Навье-Стокса и неразрывности, которые решались численно методом конечных элементов при помощи программного модуля FLOTTRAN пакета ANSYS. Для экономии времени и увеличения точности расчетов использовались неравномерные сетки, которые сгущались в областях с большими градиентами параметров.

Получены поля гидродинамических величин, распределения скорости по поперечному сечению, изменение расходной скорости вдоль оси гидропушки для сильно вязкой (глицерин), нормальной (вода) и слабо вязкой жидкостей. При помощи интеграла Бернулли определены потери на трение. Установлено, что при скоростях порядка 1000 м/с влияние вязкости на движение воды в гидропушке мало, а для глицерина, вязкость которого почти в 1000 раз больше, существенно (потери на трение для воды и глицерина составляют 4 % и 28 %). Показано, что течение в гидропушке с достаточной точностью можно рассчитывать в квазиодномерном приближении, при котором параметры течения усредняются по поперечному сечению сопла и радиальная скорость не учитывается. Расчет в квазиодномерном приближении выполнен методом Годунова.

Рассчитаны гидродинамические поля для установившегося взаимодействия затопленной струи жидкости, истекающей со скоростью 1000 м/с, с преградой. На рис. 1 приведено поле скоростей и распределение осевой компоненты скорости в трех сечениях на расстояниях $1/4L$, $1/2L$ и $3/4L$ от преграды (L – расстояние до преграды) для воды (сплошные) и слабо вязкой воды (пунктирные кривые). Показано, что в пространстве формируется четко выраженная струя, максимальное давление которой на преграду практически равно давлению торможения на выходе из сопла. Зона повышенного давления локализована вблизи центра преграды и имеет размеры порядка диаметра струи. Методом исчезающей вязкости установлено, что влиянием вязкости воды можно пренебречь, т.к. потери полного давления составляют всего около 2 %.

Достоверность результатов проверялась расчетами на разных сетках, по выполнению законов сохранения и сравнением с результатами, полученными другими методами.

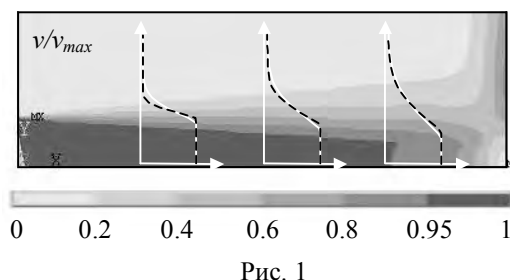


Рис. 1

Аналитические свойства уравнения Бюргера-Хаксли.

*Ефимова Ольга Юрьевна*¹⁵

аспирант

Московский инженерно-физический институт (государственный университет),
Москва, Россия

E-mail: mephistka@mtu-net.ru

¹⁵ Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору, д.ф.-м. н. Кудряшову Н.А.

Уравнение Бюргерса-Хаксли

$$u_t + \alpha u u_x = D u_{xx} + \beta u + \gamma u^2 - \delta u^3$$

где D – коэффициент диффузии, α характеризует нелинейный перенос, а коэффициенты β , γ и δ описывают нелинейный источник, используется для описания многих волновых процессов в физике, химии и экологии. Например, оно применяется для характеристики движения доменной стенки в сегнетоэлектрике в электрическом поле [1] и при описании динамики экологической системы, в которой происходит размножение животных с учетом их смертности, диффузионного перемещения по среде и ограниченного количества жизненных ресурсов [2].

Целью данной работы является исследование аналитических свойств уравнения Бюргерса-Хаксли.

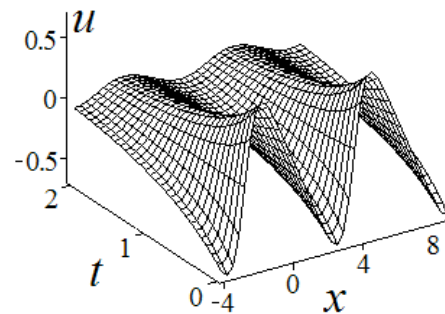
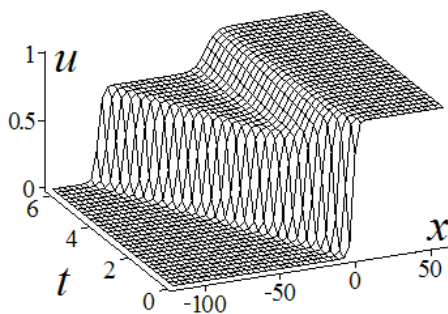
В общем случае уравнение Бюргерса-Хаксли не проходит тест Пенлеве и, следовательно, не относится к классу точно решаемых уравнений [3]. Однако существуют некоторые частные решения. Для их нахождения используем метод усеченных разложений. При помощи замены

$$u(x, t) = A \frac{Z_x}{Z} + B, \quad Z = Z(x, t)$$

удается найти точное решение уравнения Бюргерса-Хаксли с двумя произвольными параметрами при любых значениях коэффициентов уравнения.

Одним из наиболее практически важных вопросов является получение решений уравнения Бюргерса-Хаксли в переменных бегущей волны $u(x, t) = v(z)$, $z = x - C_0 t$. В этом случае при помощи методов степенной геометрии [4] получены все степенные асимптотики, а также все соответствующие этим асимптотикам разложения.

Исследовано влияние коэффициентов уравнения Бюргерса-Хаксли. В частности, на рисунке представлены возможные решения уравнения Бюргерса-Хаксли: при $\gamma^2 + 4\beta\delta > 0$ (слева) и при $\gamma = 0$, $\beta\delta < 0$ (справа).



Литература

1. Осипов В.В. Простейшие автоволны // Соросовский образовательный журнал, 2004. №7. С. 115-121.
2. Лоскутов А.Ю., Михайлова А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
3. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.
4. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи математических наук, 2004. Т. 59. Вып. 3. С. 462-469.

К обобщению решения Прандтля на вязкопластические материалы¹⁶

Баранова Ирина Дмитриевна¹⁷

студентка

*Московский Авиационный институт (государственный технический университет),
факультет «Прикладная математика и физика», Москва, Россия*

E-mail: Baranova_Irina_D@mail.ru

Классическое решение, описывающее сжатия слоя идеально-жесткопластического материала между параллельными шероховатыми плитами, было получено Прандтлем и Надаи и приводится практически во всем монографиях по теории пластичности, например [1]. Несмотря на приближенный характер решения, оно достаточно точно отражает реальную картину течения, что было подтверждено численными расчетами. В связи с этим, большой интерес вызывает обобщение этого решения на другие модели жесткопластических материалов. Большое количество таких обобщений можно найти в [2]. Однако, непосредственной проверкой можно убедиться, что некоторые обобщения приводят к парадоксальным результатам. В частности, решение [3] предсказывает бесконечное усилие, требуемое для деформирования слоя, если предполагается справедливым закон максимального трения. В настоящей работе анализируется решение, полученное в [3], и предлагается класс вязкопластических моделей материалов, для которого решение имеет смысл при применении всех общепринятых законов трения. Этот класс достаточно широк, чтобы описать любые доступные экспериментальные данные. Основная особенность этого класса моделей состоит в том, что предел текучести материала, который для вязкопластических материалов зависит от эквивалентной скорости деформации, стремится к конечному пределу при стремлении эквивалентной скорости деформации к бесконечности. Для некоторых функций из отмеченного класса асимптотическое поведение решения вблизи поверхности трения качественно совпадает с поведением классического решения Прандтля. Представляется, что полученное решение может быть использовано для предсказания свойств материала в тонком слое вблизи поверхности трения, где, как известно [4], многие свойства значительно отличаются от свойств в основном объеме.

Литература.

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности, М.: ГИТТЛ, 1956. 324с..
2. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред, Том 1, М.: Физматлит, 2001. 445с.
3. Adams M.J., Briscoe B.J., Corfield G.M., Lawrence C.J., Papathanasiou T.D.// Trans. ASME J. Appl. Mech. 1997. V.64. P.420-424.
4. Aukrust T., LaZghab S. // Intern. J. Plast. 2000. V.16. No.1. P.59-71

Расчёт несущей способности здания на основе методов конечных элементов

Даненова Гульмира Тулендиевна

Доцент кафедры Системы автоматизированного проектирования, к.т.н.

¹⁶Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ-05-01-00153.

¹⁷ Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Александрову С. Е. за помощь в подготовке работы.

*Карагандинский государственный технический университет, Караганда, Казахстан,
E-mail: gulmira@kstu.kz*

Современные достижения науки и техники, возрастающая функциональность современных изделий требуют выполнения проектных работ большого объема. Требования к качеству проектов, срокам их выполнения оказываются все более жесткими в условиях конкурентной борьбы за потребителя. Удовлетворить эти требования путем количественного увеличения проектировщиков невозможно, так как распараллеливание проектных работ не безгранично.

Решение проблемы возможно путем внедрения в практику инженерного проектирования методов и средств автоматизированного проектирования.

В данной работе выполнен комплексный анализ детского развлекательного комплекса, расположенного по адресу г.Караганда, ул. Алиханова 38/2 (рис.1), осуществлена проверка несущей способности плит перекрытий, балок, железобетонных конструкций и фундаментов. Расчеты производились в программном комплексе МОНОМАХ, предназначенном для автоматизированного проектирования железобетонных конструкций многоэтажных каркасных зданий. В результате расчета получены значения и эпюры перемещений вдоль осей X, Y, Z. Максимальные значения не превышают допустимых значений.

Также произведен расчет монолитных железобетонных колонн, балок и плит перекрытия. В результате анализа плиты перекрытия видно, что прогиб в центральной точке составил 98,2 мм, что не допустимо для данной конструкции ($\max=42$ мм). Принято решение - разместить колонну в центре. Подобрана также оптимальная толщина плиты. Произведен расчет всех балок исследуемого объекта. Приведен расчет 6 м балки ($b=60$ мм, $h=45$ мм) для которой допускается прогиб 24 мм. При нагрузке 6тс/м прогиб составил 9.91 мм, что меньше допустимого 12 мм.

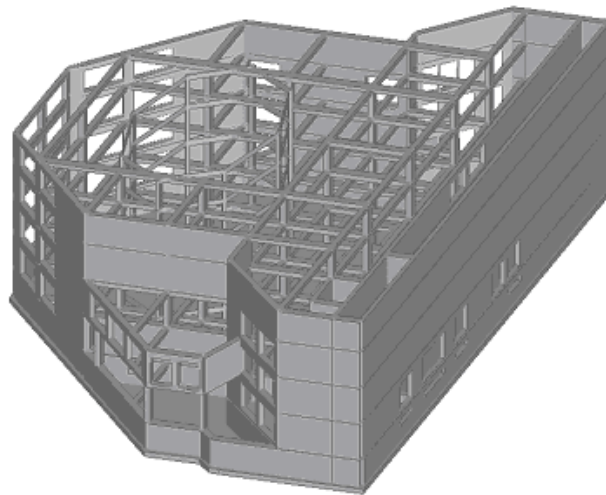


Рисунок 1 Детский развлекательный центр

Анализ результатов показал отличную сходимость с аналитическими расчетами. Таким образом, данный подход вполне применим и для других объектов строительства.

Нелинейная антиплоская деформация плоскости с разрезом и жестким включением

Гасратова Н. А.

аспирантка

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Gasratova_na@mail.ru

В данной работе получены точные решения для антиплоской деформации плоскости с прямолинейным разрезом и жестким включением в рамках нелинейной теории упругости.

Нелинейная антиплоская деформация, как и линейная, реализуется в длинных цилиндрических телах, нагруженных по боковой поверхности цилиндра вдоль его образующей. К.Ф. Черным [1] была предложена модель нелинейной антиплоской деформации, которая определяется следующим законом движения:

$$x_1 = cx_1^\circ, \quad x_3 = \lambda x_3^\circ + w(x_1^\circ, x_2^\circ), \quad x_2 = cx_2^\circ, \quad (1)$$

где c и λ - положительные постоянные, а $w(x_1^\circ, x_2^\circ)$ - осевое смещение. Используем пространственную декартову систему координат x_i , с ортами g_i , x_i° - материальные координаты ($i = 1, 2, 3$).

Напряженное состояние можно описать тензором номинальных напряжений

$$\left\{ \mathbf{F}^{-1} \mathcal{J} \mathbf{O} \right\} = \left\{ F^{-1} \mathcal{J} \Sigma \right\}_{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta. \quad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu^\circ} \mathbf{g}_\mu \mathbf{g}_\nu, \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial x_\alpha^\circ}{\partial x_\beta} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}_\beta, \quad (3)$$

$J = |F_{ij}|$ - кратность изменения объема, Σ - тензор напряжений Коши.

В данной работе будем рассматривать материал типа неогуковского, для которого упругий потенциал имеет вид

$$\Phi = \frac{\mu}{2} [I_c - 3],$$

где $I_c = F_{\beta 1} F_{\beta 1} + F_{\beta 2} F_{\beta 2} + F_{\beta 3} F_{\beta 3}$ - первый инвариант тензора деформации Грина.

Тогда связь между напряжениями и смещениями определяет соотношение

$$\left\{ F^{-1} \mathcal{J} \Sigma \right\}_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_{ji}}. \quad (4)$$

Необходимо найти напряженное состояние плоскости с прямолинейным разрезом ($-a \leq x_1^\circ \leq a$) с заданными на бесконечности напряжениями $\left\{ F^{-1} \mathcal{J} \Sigma \right\}_{13}$, $\left\{ F^{-1} \mathcal{J} \Sigma \right\}_{23}$, края разреза свободны от нагрузок и при тех же условиях определить напряженное состояние плоскости с жестким включением.

В рамках указанной теории для закона движения (1) с учетом (2), (3) и (4) уравнения равновесия при пренебрежении массовыми силами имеют вид

$$\left\{ F^{-1} \mathcal{J} \Sigma \right\}_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1^\circ}, \quad \left\{ F^{-1} \mathcal{J} \Sigma \right\}_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2^\circ}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^{\circ 2}} = 0 \quad (5)$$

Согласно (4), w удовлетворяет (5).

Функцию $w(x_1^\circ, x_2^\circ)$ рассматриваем как вещественную часть аналитической функции $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = w(x_1^\circ, x_2^\circ) + iv(x_1^\circ, x_2^\circ), \quad \xi = x_1^\circ + ix_2^\circ \quad (6)$$

Так как $\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}$; $\frac{\partial w}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}$, то учитывая (5), заключаем, что v является

функцией напряжения. Краевые условия, будем задавать на недеформируемой границе тела. Статическое граничное условие заключается в задании напряжения σ_{n^e} , а кинематическое в виде $\partial w / \partial s = 0$, которые с учетом (4) и (6) записываются в виде:

$$\sigma_{n^e} - i \frac{\partial w}{\partial s} = \varphi'(\xi) e^{i\theta}, \quad \Psi(\xi) = \varphi'(\xi).$$

При указанных преобразованиях и при использовании конформного отображения плоскости с разрезом на единичный круг позволяют найти точные решения для напряжений (особенно интересны вблизи концов разреза и жесткого включения) и для функции осевого смещения.

При использовании данного упругого потенциала задача свелась к решению линейной задачи. Получены точные решения для поставленных задач в конечном виде, что в линейном случае бывает редко. Рассмотрены асимптотические значения напряжений вблизи концов разреза и включения, которые имеют корневую особенность $(a/2r^e)^{1/2}$.

Литература

1. Черных. К. Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения). – Спб. изд, СОЛО, - 2004.

Идентификация вязкоупругих характеристик новых композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа взрывного деформирования оболочек вращения¹⁸

*Куликова Надежда Александровна*¹⁹

научный сотрудник

Научно исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. М.В. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

E-mail: knadya2004@mail.ru

При проектировании конструкций современной техники применение традиционных конструкционных материалов, учитывая повышенные требования к условиям их эксплуатации, практически себя исчерпало и дальнейший прогресс в этой области возможен лишь при использовании новых композитных материалов. Однако применение новых материалов наталкивается на определенные трудности, связанные с отсутствием данных по деформационным характеристикам композитных материалов.

Одним из методов определения констант реологических моделей является непосредственное использование экспериментальной информации, получаемой при динамическом нагружении оболочек. По сути, этот метод является решением обратной задачи, позволяющей уточнить характеристики материала и модели, закладываемые в расчет конкретной конструкции.

Предлагается следующая численная методика определения параметров реологических моделей механического поведения материала. Требуется найти комплекс

¹⁸ Настоящая статья подготовлена по результатам исследований, проведенных при поддержке РФФИ (проекты № 05-08-50212, № 05-01-00837, № 05-01-08055) и ФЦНТП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям науки и техники» проект РИ-112/001/404

¹⁹ Автор выражает признательность профессору, д.ф.м.н. Баженову В.Г. за помощь в подготовке тезисов.

жесткостных и реологических характеристик определяющих соотношений композитного вязкоупругого материала, при которых численное решение задачи динамического поведения вязкоупругих оболочек вращения, наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными.

Допустим, что известно численное решение начально-краевой задачи, описывающей динамическое поведение вязкоупругой оболочки вращения в виде зависимостей окружных деформаций на внешней поверхности оболочки во времени. Считаем, что имеются соответствующие тензограммы деформаций, полученные в результате экспериментальных испытаний. Поскольку расчетные и экспериментальные осциллограммы деформаций являются по сути затухающими условно моногармоническими колебаниями, то можно определить максимальные значения расчетных и экспериментальных деформаций, а также соответствующие моменты времени, в которые они достигаются.

Далее задача идентификации сводится к минимизации целевой функции, представляющей сумму среднеквадратичных отклонений теоретических и экспериментальных значений деформаций. Вычисление целевой функции осуществляется путём численного решения начально-краевой задачи вязкоупругого деформирования оболочки вращения при импульсном нагружении.

Работоспособность предлагаемого подхода рассматривается на задачах вязкоупругого деформирования цилиндрических и полусферических оболочках, нагруженных импульсом внутреннего давления.

Расчленение нестационарного НДС в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях нормального типа.

Кушеккалиев Алман Нысанбаевич

кандидат физико-математических наук, доцент.

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет, Уральск, Казахстан.

E-mail: alman_k@mail.ru

Работа посвящена анализу асимптотически главных составляющих для нестационарных волн в тонкостенной цилиндрической оболочке из трансверсально-изотропного материала при осесимметричной деформации. Рассматривается случай, когда направление трансверсальной изотропии совпадает с осью цилиндрической поверхности и перпендикулярно торцу, к которому приложена ударная нагрузка нормального типа NW, постоянно распределённая по толщине и не изменяющаяся со временем.

Формальное решение уравнений движения для линейной теории упругости получено с помощью двойного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Обратные преобразования проводятся с помощью разложения по вычетам и метода стационарной фазы [2]. На основе классификации вклада точек стационарной фазы в решении выявлены асимптотические свойства и определены границы областей применимости асимптотически главных составляющих решения: изгибающей составляющей Кирхгофа-Лява, квазиплоской антисимметричной составляющей, составляющей для поля Рэлея (в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея) и погранслоя в окрестности фронта волны сдвига.

Область применения двумерной теории Кирхгофа-Лява, описывается изгибающей составляющей. Показатель динамичности решения здесь равен 0, а показатель изменчивости по продольной координате – 1/2. Квазиплоская квазиантисимметричная

задача теории упругости описывается уравнениями коротковолнового высокочастотного приближения и определяет решение в областях при малом значении времени и в достаточно протяженной окрестности переднего фронта. Доказано [1] наличие области согласования между изгибной двумерной составляющей Кирхгофа–Лява и квазиплоской антисимметричной составляющей коротковолнового высокочастотного приближения. Здесь решения носят малоамплитудный осциллирующий характер, они не представляют практического интереса и их изучение необходимо только с теоретической точки зрения, в частности, для установления областей согласования. Область решения для поля Рэлея, задаваемого первой модой, представляет наибольший практический интерес для исследования (здесь имеет место одна из самых существенных волновая составляющая решения, обусловленная поверхностными волнами Рэлея и носящая название поля Рэлея). Показатели изменчивости и динамичности здесь равны единице. Хорошо известно, что в случае теории типа Тимошенко разрывы соответствующих функций появляются на условном фронте поверхностных волн Рэлея. Фронт волны сдвига по теории типа Тимошенко, соответствующий фронту волны Рэлея, является, фактически, квазифронтом. В его окрестности трехмерное решение хотя и быстро изменяется, но является непрерывным. Область погранслоя в окрестности фронта волны сдвига, где решение определяется всеми модами. По интенсивности решение также является существенным в узкой области, определяемой фронтом волны сдвига. Показатели изменчивости и динамичности равны здесь единице.

Литература

1. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986, с.176.
2. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя // Известия Вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. Науки, 2003, №5, С.10-22.

Ударное компактирование хрупких высокопористых материалов

Пирогов Сергей Александрович

научный сотрудник

НИИ механики Нижегородского государственного университета

им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

E-mail: pirogov@dk.mech.unn.ru

Ударное деформирование высокопористых керамических материалов (шамоты, муллиты и т.п.) сопровождается хрупким разрушением межпоровых перегородок, что существенно отличает поведение этих материалов от деформирования пористых сред на основе металлов или вспененных полимерных материалов, характеризующихся преимущественно упругопластическим или эластичным поведением матричного материала.

При формулировке модели динамического деформирования зависимость давления P в пористом материале от удельного объема v представляется в параметрическом виде посредством введения параметра α , характеризующего степень пористости материала, с помощью двух функций:

$$P = f(v, \alpha); \quad \alpha = g(P) \quad (1)$$

Здесь принято, что $\alpha = v_s/v$, где v_s - удельный объем сплошного матричного материала. Для описания функции $f(v, \alpha)$ из (1) при необратимом уплотнении используется ударная адиабата сплошного материала $P_s = P_s(v_s)$. Общий вид функции $f(v, \alpha)$ в работе предлагается представлять в виде:

$$f(v, \alpha) = \varphi(\alpha)P_s = \varphi(\alpha)P_s(v_s) = \varphi(\alpha)P_s(\alpha \cdot v) \quad (2)$$

Аппроксимация второй функции из (1) производится следующими выражениями:

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_e) \exp \left[- \left(\frac{P - P_e}{R} \right)^{1/n} \right], \quad P = P_e + R \cdot \left[\ln \left(\frac{1 - \alpha_e}{1 - \alpha} \right) \right]^n \quad (3)$$

Давление P в (3) считается положительным при сжатии.

Полагая, что величины α_e, P_e, R, n являются константами модели, соотношения (1) и (2), позволяют выразить все характеристики процесса компактирования пористой среды при умеренных давлениях. С учетом выражений (1)–(3) зависимость деформаций от коэффициента пористости среды вдоль кривой необратимого уплотнения представляется в виде:

$$e = e_e + \frac{1}{K_s} \left\{ \frac{P_e}{\varphi(\alpha_e)} - \frac{1}{\varphi(\alpha)} \left[P_e + R \cdot \left(\ln \left(\frac{1 - \alpha_e}{1 - \alpha} \right) \right)^n \right] \right\} - \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha_e} \right), \quad (4)$$

где e_e, P_e – начальные пределы упругости пористой среды. Выражениями (3) и (4) диаграмма ударного сжатия пористой среды представляется в параметрическом виде через коэффициент α .

Внутренняя энергия ударного сжатия шамота определяется интегралом от плотности энергии деформаций:

$$A = A_s + A_p = - \int_0^e \frac{P}{\rho} de; \quad A_p = \int_0^e \frac{P}{\rho} \frac{d\alpha}{\alpha}; \quad A_s = A - A_p \quad (5)$$

Предложенные уравнения модели деформирования пористой среды с удовлетворительной точностью описывают наблюдаемые в экспериментах качественные и количественные особенности необратимого компактирования керамических высокопористых материалов при ударных нагрузках.

Метод нахождения функции распределения нейтральных атомов в гелиосфере²⁰

Колесников Игорь Валерьевич²¹

студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: garikol@inbox.ru

²⁰ Настоящая статья подготовлена по результатам исследований, проведенных в рамках гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 04-02-14559).

²¹ Автор выражает признательность доценту, к.ф.-м.н. Измоленову В.В. за помощь в подготовке тезисов.

Одной из наиболее актуальных на сегодняшний день задач астрофизики является построение адекватной теоретической модели взаимодействия плазмы солнечного ветра с локальной межзвездной средой. Теоретические исследования этой проблемы интересны не только сами по себе, но и необходимы для правильной интерпретации экспериментальных данных. В 2008 году в NASA планируется запуск космического аппарата IBEX (interstellar boundary explorer – исследователь межзвездной границы), с помощью которого предполагается измерять с орбиты Земли потоки энергичных нейтральных атомов в диапазоне энергий 0.01 – 10 КэВ. Интерпретация этих измерений дает возможность проверить правильность современных представлений о структуре гелиосферного интерфейса.

В данной работе разрабатывается метод расчета потоков нейтральных атомов и рассматривается его применение для некоторой упрощенной модели гелиосферного интерфейса – “горячей модели”.

В рамках модели В.Б. Баранова и Ю.Г. Маламы [2] взаимодействие солнечного ветра и локальной межзвездной среды имеет два аспекта. Первый аспект – взаимодействие заряженной компоненты локальной межзвездной среды с солнечным ветром, происходящее с образованием головной и гелиосферной ударных волн и поверхности раздела – гелиопаузы. Второй аспект – взаимодействие нейтральной компоненты локальной межзвездной среды (преимущественно водорода) с плазмой солнечного ветра. При этом происходит перезарядка межзвездных атомов водорода на протонах солнечного ветра, приводящая к образованию атомов водорода и протонов (но обменявшихся импульсом и энергией). Образовавшийся протоны под воздействием электромагнитного поля солнечного ветра приобретает спиралевидную траекторию (отсюда название – захваченные ионы), центр которой движется в направлении, совпадающем с движением плазмы солнечного ветра – в сторону гелиопаузы. Попадая в область между гелиосферной ударной волной и гелиопаузой, захваченные ионы перезаряжаются с атомами межзвездного водорода, в результате чего рождаются энергичные нейтральные атомы. Некоторая их часть проникает на малые гелиоцентрические расстояния и может быть измерена на орбите Земли. Свойства этих атомов существенно зависят от характеристик плазмы в области их образования. Поэтому знание параметров энергичных нейтральных атомов несет в себе информацию о свойствах плазмы в области между гелиосферной ударной волной и гелиопаузой.

В настоящей работе на основании современных представлений о строении гелиосферного интерфейса находится функция распределения энергичных нейтральных атомов по скоростям на орбите Земли, а также интегральные величины функции распределения: концентрации, средние скорости, температуры и потоки этих частиц через выбранную площадку при различных углах ее ориентации. Сравнивая полученный теоретически результат с экспериментальными данными, можно судить об адекватности имеющейся модели гелиосферного интерфейса.

Литература

1. Баранов В.Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977.
2. Baranov V.B., Malama Yu.G. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. U A9.
3. Izmodenov V. V., Gruntman M., Malama Yu.G. // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. U A6.

О структуре переходных плотностей диффузионного процесса

Парамошина Ирина Геннадьевна

Уфимский государственный авиационный технический университет

В работе показано, что одномерный диффузионный процесс, который определяется как решение стохастического дифференциального уравнения

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s, \eta(s)) * dW(s) + \int_0^t B(s, \eta(s)) ds, \quad (1)$$

где $W(s)$ - стандартный винеровский процесс, а коэффициенты $a(s, x) \neq 0$ и $b(s, x)$ всегда считаются детерминированными гладкими функциями, представляется в виде детерминированной функции от винеровского процесса $W(s)$ [1]. Это позволило выявить связь между фундаментальными решениями уравнения Колмогорова -Фоккера -Планка и сопряженного к нему обратного уравнения Колмогорова с произвольными гладкими коэффициентами и таких же уравнений с единичным коэффициентом диффузии и некоторым коэффициентом переноса.

Выяснилось, что знание переходной плотности распределения процесса $W(s) + C(s)$ позволяет построить фундаментальное решения для целого класса уравнений Колмогорова, соответствующего уравнению (1). Отсюда определенная факторизация фундаментальных решений уравнений Колмогорова.

Эти результаты обобщены на двумерный случай и на некоторый класс многомерных диффузий. При этом, в отличие от подхода, наиболее часто применяемого в теории дифференциальных уравнений, мы не пытались с помощью замен переменных преобразовать исходное уравнение в более простое уравнение, а с помощью вероятностных методов нашли связь между фундаментальными решениями рассматриваемых уравнений, которая позволяет, например, упростить решение задачи Коши для уравнений Колмогорова, прямых и обратных.

[1] Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений. *Вестник УГАТУ*- 2004. - 4, №2.- 55-66.

Взаимодействие консольно заземленной пластинки со сверхзвуковым потоком газа

Исаулова Татьяна Николаевна, Лавит Игорь Михайлович

магистрант, д. ф.-м. н, проф.

*Тульский государственный университет, механико-математический факультет, Тула,
Российская Федерация
E-mail: tanyaisa@bk.ru*

Задача о колебаниях консольно заземленной косоугольной пластинки в сверхзвуковом газовом потоке формулируется на основе теории тонких пластинок и поршневой теории обтекания. Цель исследования заключается в нахождении критической скорости обтекания, при достижении которой пластинка теряет устойчивость. Аналитического решения поставленной задачи не существует. Применение для решения задачи метода Галеркина затруднено, так как не удается построить полную систему координатных функций, удовлетворяющих всем граничным

условиям задачи. Использовать для решения метод Ритца нельзя, потому что дифференциальный оператор задачи несимметричен. В этом случае задача не может быть поставлена как задача о разыскании минимума некоторого функционала.

В настоящем исследовании разработан численный метод решения задачи, родственной методам Ритца и Галеркина. Метод отличается от метода Ритца тем, что на вариации координатных функций не накладывается требование удовлетворять существенным граничным условиям. Кроме того, предложенный метод не связан с вариационной задачей. Его отличие от метода Галеркина заключается в том, что координатные функции не обязаны удовлетворять естественным граничным условиям на свободных сторонах пластинки. Поэтому их легко построить. Для этого вводится в рассмотрение область решения, представляющая собой квадрат. Получено отображение области решения на рассматриваемую область. Координатные функции определяются как произведения полиномов Лежандра по координатам области решения.

Приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие влияние тех или иных параметров задачи на критическую скорость. Где это возможно, результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными и результатами предшествующих исследований. Получены зависимости критической скорости обтекания от параметров подобия, характеризующих процесс. Показано, что для практически значимых расчетных случаев решение задачи оказывается автомодельным по некоторым параметрам подобия.

Экспериментально-расчетная схема определения параметров разрушения для металлов и сплавов.

Константинов А.Ю., Абрамов А.А., Брагов А.М., Ломунов А.К., Сергеичев И.В.

аспирант

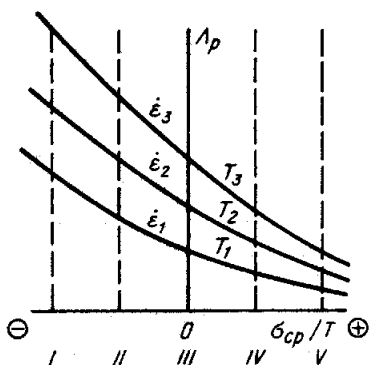
НИИ механики ННГУ им. Н.И.Лобачевского, механико-математический факультет,
Нижний Новгород, Россия

E-mail: konstantinov_al@mail.ru

При решении задач пробития, глубокого проникания и ударного воздействия на конструкцию, приводящего к её разрушению, помимо моделей, достоверно описывающих динамическое поведение материала до стадии разрушения (с учетом влияния скорости деформации, температуры и т.п.), необходимо знание характеристик, определяющих разрушение материала. Теория трещинообразования и дислокационная теория разрушения достаточно сложны для решения практических задач; различные методы статистической теории прочности трудоемки и ограничены областью использования. Поэтому в теории и практике используется феноменологический подход, основанный на методах механики сплошной среды с идеализированной моделью металлов.

Величина предельной степени деформации до разрушения Λ_p [1] определяется термомеханическими условиями деформирования: $\Lambda_p = \Lambda_p(\sigma_{cp}/\tau_i; \dot{\epsilon}_p; T)$, где σ_{cp} –

среднее напряжение, τ_i – интенсивность касательных напряжений, σ_{cp}/τ_i — показатель напряженного состояния (н.с.); $\dot{\epsilon}_p$ – скорость эффективной пластической деформации, T – температура деформации. Функциональный вид этой зависимости определяется экспериментально. На рисунке схематично изображено влияние термомеханических условий



на деформацию разрушения ($\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_3$, $T_1 < T_2 < T_3$) [2]. Римскими цифрами обозначены значения показателя н.с., соответствующие различным испытаниям: I – испытания методом прокатки на клин, II – испытания на сжатие, III – испытания на кручение, IV – растяжение цилиндрических образцов, V – растяжение образцов с выточками. При испытании на растяжение цилиндрических образцов в случае однородной деформации (до образования шейки) предельная степень деформации определяется через относительное удлинение δ : $\Lambda_p = \sqrt{3} \ln(1/(1-\delta))$ и для неоднородной сосредоточенной деформации – через относительное сужение ψ : $\Lambda_p = \sqrt{3} \ln(1/(1-\psi))$

В данной работе представлен экспериментально-расчетный метод определения величины предельной степени деформации на базе модификации РСГ на высокоскоростное растяжение. Экспериментально определены предельные характеристики (ψ и δ) алюминиевого сплава АК4 при растяжении цилиндрических образцов и образцов с выточкой. Величина Λ_p , рассчитанная по экспериментальным значениям относительного сужения, уточнялась при численном моделировании процесса разрушения образца при растяжении. Данная схема позволяет более точно определить искомую характеристику разрушения, а также соответствующий показатель σ_{cp}/τ_i с учетом неоднородности напряженно-деформированного состояния в рабочей части образца.

Литература

1. Колмогоров В.Л. Напряжение. Деформация. Разрушение. М.: Metallurgy, 1970.
2. Полухин П.И., Гун Г.Я., Галкин А.М. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. М.: Metallurgy, 1983.

Развитие «горячих» трещин в цилиндре.

Жорник Виктория Александровна

доцент

Таганрогский государственный педагогический институт, Таганрог, Россия

E-mail: zhornik@land.ru

Задача расчета «горячих» трещин [1] в цилиндре ставится следующим образом. В начальный момент времени сплошной круговой цилиндр неограниченной длины имеет температуру, равную нулю, а твердая цилиндрическая оболочка из того же материала - температуру, очень близкую к температуре плавления. Причем внутренний радиус оболочки равен радиусу цилиндра, а на внешней ненагруженной поверхности оболочки имеется кольцевая трещина. Далее сплошной цилиндр вставляется в оболочку и контактные поверхности свариваются. Таким образом, в начальный момент времени в системе (цилиндр-оболочка) напряжений не возникает, несмотря на наличие температурных градиентов. При охлаждении этой системы до нулевой температуры в оболочке возникают растягивающие напряжения, что вызывает развитие кольцевой трещины. Решение поставленной задачи механики хрупкого разрушения для сплошного кругового цилиндра радиуса, увеличенного на толщину наплавленного слоя, разбивается на сумму двух решений. В первом решении задачи нестационарной теории термоупругости предполагается, что система не имеет трещины, начальная температура в области сплошного цилиндра нулевая, а в области оболочки равна температуре плавления. Кроме того предполагается, что в начальный момент времени система не напряжена, а внешняя ненагруженная поверхность оболочки теплоизолирована или

охлаждается до нулевой температуры. В этом случае система находится в обобщенном плоскодеформированном состоянии, содержит только главные напряжения, зависящие от радиуса и времени. Решение этой задачи получено в [2], из которого следует, что начальные градиенты температур, имеющие место в поставленной задаче, вызывают начальное напряженно-деформированное состояние системы. Однако, поскольку согласно постановке задачи система ненапряжена в начальный момент времени, то из решения, полученного в [2], необходимо вычесть решение, соответствующее начальному напряженно-деформированному состоянию системы. Разность этих решений и будет первым решением. Второе решение изотермической теории упругости рассматривается для системы с кольцевой трещиной на свободной поверхности оболочки. Однако в этом случае берега трещины имеют нормальную нагрузку, компенсирующую осевую нагрузку первого решения. Указанное решение в сумме с первым удовлетворяет всем граничным условиям, в том числе и на берегах трещины. Решение задачи сводится к нахождению функции Буссинеска-Папковича-Нейбера, которая определяется из смешанных граничных условий на берегах трещины. Эти смешанные граничные условия приводят к решению парных рядовых уравнений и далее к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое решалось методом последовательных приближений. Окончательное решение поставленной задачи сводится к нахождению коэффициента интенсивности напряжений (КИН) для развивающейся кольцевой трещины в зависимости от времени.

Литература

1. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. М: Физматлит 2005.-719 с.
2. Жорник В.А. Сравнительный анализ развития кольцевых и дискообразных трещин в сплошных цилиндрах с тонким покрытием // Сборник тезисов Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2004», т.1. М: Изд-во МГУ, 2004, с.271-272.

Коэффициент интенсивности скорости деформации при осадке цилиндров²²

Целищева Екатерина Владимировна²³

студентка

*Московский Авиационный Институт (ТУ), «Прикладная математика и физика»,
Москва, Россия*

E-mail: k_tselishcheva@mail.ru

При применении модели идеального жесткопластического материала и закона максимального трения (удельные силы трения равны пределу текучести при чистом сдвиге) возникает сингулярность в поле скорости вблизи поверхности трения [1]. В частности, эквивалентная скорость деформации стремится к бесконечности обратно пропорционально корню квадратному из расстояния до поверхности трения. Коэффициент при главном сингулярном члене в разложении эквивалентной скорости деформации в ряд в окрестности поверхности трения называется коэффициентом интенсивности скорости деформации [1]. Основываясь на концепции коэффициента интенсивности скорости деформации, можно пытаться строить теории эволюции свойств материала в тонких слоях вблизи поверхностей трения при больших деформациях. Необходимость таких теорий диктуется экспериментально наблюдаемыми

²²Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ-06-08-91023-Мол.

²³ Автор выражает признательность профе, д.ф.-м.н. Александрову С. Е. за помощь в подготовке работы.

фактами существования высокого градиента свойств материала вблизи поверхностей трения в таких процессах, как выдавливание через матрицу [2]. Одна из попыток построить такую теорию была предпринята в [3]. Коэффициент интенсивности скорости деформации и его критическая величина являются важными составляющими этой модели. Поэтому, определение распределения коэффициента интенсивности скорости деформации необходимо по двум причинам: а) чтобы применять теорию [3] и другие теории, которые могут быть основаны на концепции коэффициента интенсивности скорости деформации, б) чтобы предложить и реализовать специальную экспериментальную методику для определения данных, требуемых для таких новых теорий. В настоящей работе рассматривается осадка кругового цилиндра методом верхней оценки. Такая геометрия была выбрана из-за того, что цилиндрические образцы очень широко используются в экспериментах. Применение метода верхней оценки позволяет заложить правильное асимптотическое поведение действительного поля скорости в кинематически возможные поля скоростей. Хотя верхне-граничные решения для осадки цилиндров уже были получены [4, 5], предполагается, что новое решение всегда будет давать лучшую оценку, так как предложенное возможное поле скорости учитывает больше качественных особенностей поведения действительного поля скорости. Кроме того, в работе вычисляется коэффициент интенсивности скорости деформации и анализируется его зависимость от параметров процесса.

Литература

1. Alexandrov S., Richmond O. // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V.36. No.1. P.1-11.
2. Aukrust T., LaZghab S. // Intern. J. Plast. 2000. V.16. No.1. P.59-71.
3. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В., Лямина Е.А. // Докл. РАН. 2003. Т.389. №2. С.180-183.
4. Kobayashi S., Thomsen E.G. // Int. J. Mech. Sci. 1965. V.7. No.2. P.127-143.
5. Александров С.Е. // Изв. РАН МТТ. 1994. № 5. С.86-91.

Поведение пластических решений вблизи поверхностей максимального трения²⁴

*Лямина Елена Алексеевна*²⁵

научный сотрудник

Институт проблем механики РАН, Москва, Россия

E-mail: lyamina@mail.northnet.ru

Модель идеального жесткопластического материала является основой для построения широкого класса жесткопластических моделей, включающих эффекты вязкости, деформационного упрочнения, зависимости условия текучести от среднего напряжения и т.д. При применении закона максимального трения решения, основанные на модели идеального жесткопластического материала, становятся сингулярными (Alexandrov and Richmond, 2001). Решения, основанные на других жесткопластических моделях, могут не быть сингулярными при применении такого же закона трения, то есть будут качественно отличаться от идеально жесткопластических решений. На примере ряда полу-аналитических решений для пластических моделей с условием текучести, зависящим от среднего напряжения, такое качественное различие решений было продемонстрировано в (Alexandrov, 2003) и (Александров и Лямина, 2005). Во многих

²⁴ Настоящая статья подготовлена по результатам исследований, проведенных в рамках гранта ИНТАС (№ 04-83-2723).

²⁵ Автор выражает признательность д.ф.-м.н. Александрову С.Е. за помощь в подготовке тезисов.

случаях разные модели пластичности применяются для одного и того же материала, который находится в несколько разных условиях, или когда требуется рассмотреть различные эффекты. В таких случаях граница области применимости той или иной модели материала достаточно расплывчата и, поэтому, желательно, чтобы качественные особенности решений сохранялись при переходе от одной модели к другой. В настоящей работе систематизируются результаты, полученные в (Alexandrov, 2003) и (Александров и Лямина, 2005), и предлагается продолжение этих исследований. В частности, формулируется осесимметричная задача, допускающая точное полу-аналитическое решение для ряда моделей материала с условием текучести, зависящим от среднего напряжения (деформирование слоя материала между коническими поверхностями, на которых действует закон максимального трения), включая модели, рассмотренные в (Alexandrov, 2003) и (Александров и Лямина, 2005). Рассматриваются различные широко применяемые условия текучести и различные соотношения между напряженным и деформированным состоянием. Кроме того, формулировка задачи допускает создание качественно различных напряженно-деформированных состояний в точках поверхности трения, которые оказывают влияние на качественное поведение решений. Значительным отличием от исследованных случаев является негиперболичность систем уравнений для некоторых моделей. Важность этого факта заключается в том, что различие в поведении решений, обнаруженное в (Александров и Лямина, 2005), можно было объяснить с помощью свойств характеристических кривых. Полученные полу-аналитические решения показывают, что в случаях, когда потеря гиперболичности связана с переходом от плоско-деформированного состояния к осесимметричному, качественные особенности решений сохраняются. Для всех рассмотренных случаев проанализировано поведение решений вблизи поверхностей трения и выявлены модели и моды деформирования, которые приводят к такому же качественному поведению решений, как и в случае идеального жесткопластического материала.

Литература

1. Alexandrov S. (2003) Comparison of double-shearing and coaxial models of pressure-dependent plastic flow at frictional boundaries // Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics, v.70(2), p. 212-219.
2. Alexandrov S., Richmond O. (2001) Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // International Journal of Non-Linear Mechanics, v.36(1), p.1-11.
3. Александров С.Е., Лямина Е.А. (2005) Качественные различия в решениях при использовании теорий пластичности с условием текучести Кулона-Мора // Прикладная механика и техническая физика, т.46(6), с.136-145.

Конечноэлементный метод решения задач механики разрушения²⁶

Крюкова Наталья Владимировна²⁷

аспирант

Тульский государственный университет, механико-математический факультет,

Тула, Россия

E-mail: natavict@mail.ru

²⁶ Настоящая статья подготовлена по результатам исследований, проведенных при поддержке РФФИ (проект №04-01-00247).

²⁷ Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Лавиту И.М. за помощь в подготовке тезисов.

При численном решении задач линейной механики разрушения необходимо учитывать корневую особенность полей напряжений и деформаций в кончике трещины. Обычно это делается с использованием специальных конечных элементов. Однако для решения задач о растущей трещине такой подход неудобен, так как требует перестройки конечноэлементной сетки.

В настоящем исследовании предложен метод, свободный от указанного недостатка. В нем используются обычные конечные элементы. Корневая особенность напряжений и деформаций учитывается за счет добавления дополнительных функций к системе обычных координатных функций метода конечных элементов. Эти дополнительные функции берутся из асимптотического решения задачи линейной механики разрушения, пропорционального коэффициентам интенсивности напряжений.

Коэффициенты интенсивности напряжений включаются, дополнительно к узловым перемещениям, в число основных неизвестных задачи. Порядок получающейся системы линейных алгебраических уравнений увеличивается на число ненулевых коэффициентов интенсивности напряжений. Так как каждый из дополнительных столбцов матрицы коэффициентов системы уравнений пропорционален одной неизвестной величине, удастся свести решение задачи к решению системы уравнений с ленточной матрицей.

Представлены решения тестовых задач, подтверждающих эффективность метода по сравнению с обычным конечноэлементным методом, в котором коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва определяется в результате вычисления J -интеграла. Среди этих задач рассмотрена и задача о короткой трещине в компактном образце с реальной геометрией паза. Определена длина трещины, при достижении которой различие между обычной расчетной схемой и уточненной расчетной схемой можно пренебречь. Результаты сопоставляются с данными других исследователей.

Численное решение упругопластической задачи кручения-растяжения

тел вращения при больших деформациях

Павленкова Елена Владимировна²⁸

научный сотрудник

НИИ механики Нижегородского государственного университета

им. Н.И.Лобачевского, Н.Новгород, Россия

E-mail: pavlyonkova@dk.mech.unn.ru

Разработана и программно реализована в рамках ППП «Динамика-2» достаточно общая методика численного решения задач о больших деформациях упругопластических тел вращения с сохранением осевой симметрии. Движение тел описывается общим уравнением динамики, следующим из принципа возможных перемещений в форме Журдена в цилиндрической системе эйлеровых координат. Полагается, что угол закручивания по окружной координате зависит от радиальной и осевой координат и не зависит от окружной. Поворот частиц среды как жесткого целого учитывается производной Яуманна. Учет упругопластических свойств материала осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением. Определяющая система уравнений решается методом конечного элемента в сочетании с явной схемой интегрирования во времени типа «крест». Для задач кручения разработана

²⁸ Автор выражает признательность профессору, д.ф.м.н. Баженову В.Г. и к.т.н. Зефинову С.В. за помощь в подготовке тезисов

и реализована экспериментально-численная методика построения диаграмм деформирования при неоднородном НДС. Для ускорения вычислительного процесса используется экстраполяция по определенной на предыдущих шагах диаграмме деформирования, что позволяет корректировать ее не на каждом временном шаге, а только при отклонении найденного крутящего момента от экспериментального на заданную величину. В итоге однократного прямого численного расчета получаем диаграмму деформирования материала, соответствующую экспериментальной зависимости внешнего момента от угла закручивания. Приводятся экспериментальные данные и результаты решения задачи о кручении стержня переменной толщины из материала 12X18H10T до деформаций разрушения. Получено хорошее соответствие результатов расчета и экспериментов при растяжении и кручении, что свидетельствует о слабой зависимости диаграммы деформирования стали 12X18H10T от вида напряженного состояния при больших деформациях. Отметим, что при кручении не наблюдается образование “шейки” (как при растяжении), и однородность НДС сохраняется вплоть до разрушения, что позволяет построить диаграмму деформирования до деформаций, вдвое больших, чем при растяжении. Проведено сопоставление численных и экспериментальных исследований процессов деформирования сплошных осесимметричных образцов переменной толщины при комбинированном нагружении кручением-растяжением до момента разрушения. Выявлены основные закономерности процессов деформирования и предельных состояний сплошных осесимметричных образцов при пропорциональном кинематическом нагружении; разработан набор параметров и интегральных характеристик для анализа сложного НДС с учетом больших деформаций и неоднородности в процессе деформирования.

Поведение пластических решений вблизи поверхностей максимального трения²⁹

Лямина Елена Алексеевна³⁰

научный сотрудник

Институт проблем механики РАН, Москва, Россия

E-mail: lyamina@mail.northnet.ru

Модель идеального жесткопластического материала является основой для построения широкого класса жесткопластических моделей, включающих эффекты вязкости, деформационного упрочнения, зависимости условия текучести от среднего напряжения и т.д. При применении закона максимального трения решения, основанные на модели идеального жесткопластического материала, становятся сингулярными (Alexandrov and Richmond, 2001). Решения, основанные на других жесткопластических моделях, могут не быть сингулярными при применении такого же закона трения, то есть будут качественно отличаться от идеально жесткопластических решений. На примере ряда полу-аналитических решений для пластических моделей с условием текучести, зависящим от среднего напряжения, такое качественное различие решений было продемонстрировано в (Alexandrov, 2003) и (Александров и Лямина, 2005). Во многих случаях разные модели пластичности применяются для одного и того же материала, который находится в несколько разных условиях, или когда требуется рассмотреть

²⁹ Настоящая статья подготовлена по результатам исследований, проведенных в рамках гранта ИНТАС (Nr 04-83-2723).

³⁰ Автор выражает признательность д.ф.-м.н. Александрову С.Е. за помощь в подготовке тезисов.

различные эффекты. В таких случаях граница области применимости той или иной модели материала достаточно расплывчата и, поэтому, желательно, чтобы качественные особенности решений сохранялись при переходе от одной модели к другой. В настоящей работе систематизируются результаты, полученные в (Alexandrov, 2003) и (Александров и Лямина, 2005), и предлагается продолжение этих исследований. В частности, формулируется осесимметричная задача, допускающая точное полу-аналитическое решение для ряда моделей материала с условием текучести, зависящим от среднего напряжения (деформирование слоя материала между коническими поверхностями, на которых действует закон максимального трения), включая модели, рассмотренные в (Alexandrov, 2003) и (Александров и Лямина, 2005). Рассматриваются различные широко применяемые условия текучести и различные соотношения между напряженным и деформированным состоянием. Кроме того, формулировка задачи допускает создание качественно различных напряженно-деформированных состояний в точках поверхности трения, которые оказывают влияние на качественное поведение решений. Значительным отличием от исследованных случаев является негиперболичность систем уравнений для некоторых моделей. Важность этого факта заключается в том, что различие в поведении решений, обнаруженное в (Александров и Лямина, 2005), можно было объяснить с помощью свойств характеристических кривых. Полученные полу-аналитические решения показывают, что в случаях, когда потеря гиперболичности связана с переходом от плоско-деформированного состояния к осесимметричному, качественные особенности решений сохраняются. Для всех рассмотренных случаев проанализировано поведение решений вблизи поверхностей трения и выявлены модели и моды деформирования, которые приводят к такому же качественному поведению решений, как и в случае идеального жесткопластического материала.

Литература

1. Alexandrov S. (2003) Comparison of double-shearing and coaxial models of pressure-dependent plastic flow at frictional boundaries // Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics, v.70(2), p. 212-219.
2. Alexandrov S., Richmond O. (2001) Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // International Journal of Non-Linear Mechanics, v.36(1), p.1-11.
3. Александров С.Е., Лямина Е.А. (2005) Качественные различия в решениях при использовании теорий пластичности с условием текучести Кулона-Мора // Прикладная механика и техническая физика, т.46(6), с.136-145.

Масштабный эффект при моделировании разноглубинной траловой системы

Недоступ Александр Алексеевич

к.т.н., доцент

Калининградский государственный технический университет, Калининград, Россия

E-mail: nedostup@klgtu.ru

Модельные технические испытания являются важнейшим звеном в цепи создания и совершенствования орудий промышленного рыболовства. Необходимость в них возникает на стадии проектирования новых конструкций, при эксплуатации существующих орудий и при их модернизации.

При моделировании орудий рыболовства возникает масштабный эффект, который свидетельствует о невыполнении всех масштабов моделирования и является показателем погрешности связанный с несоблюдением всех критериев подобия рыболовных орудий.

В настоящее время при моделировании траловой конструкции заранее не известна величина масштабного эффекта.

Целью исследований является создание методики моделирования стационарных режимов движения разноглубинного трала в гидроканале и опытовом бассейне.

Для достижения поставленной цели была решена основная задача: обоснованы масштабы моделирования тралов. Эталонами, позволяющие оценивать результаты моделирования стали натурные разноглубинные тралы 130/1120 и 80/150.

Методика проведения экспериментальных работ с физическими моделями разноглубинных тралов приведена в (Белов, 2000). Эксперименты проходили в гидроканале ЗАО «МариНПО» и опытовом бассейне КГТУ. Все измерения проводились соответствующим оборудованием: тензометрической аппаратурой и угломерами.

Далее проводилась обработка полученных данных, а затем рассчитывались масштабные эффекты. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения масштабных эффектов

№ модели трала	Отношения конструктивных характеристик			Значения масштабных эффектов				
	C_{F_0}	C_p	C_{da}	C_k	M_{Lr}	M_{Ld}	M_H	M_Y
1	1,49	50,7	2,98	3,76±6%	1,03±5%	1,03±9%	0,94±10%	1,04±9%
2	2,10	13,3	3,24					
3	1,95	19,2	3,07					
4	1,73	39,1	2,80					
5	18,7	0,14	12,7	0,91±7%				
6	8,10	5,50	8,80					

Примечание: C_{F_0} – масштаб сплошности, C_p – масштаб конструктивного комплекса, C_{da} – масштаб отношения диаметра ниток к шагу ячее, C_k – масштаб гидродинамических коэффициентов сопротивления траловой оболочки, M_{Lr} – масштабный эффект горизонтального раскрытия по гужу, M_{Ld} – масштабный эффект горизонтального раскрытия между досками, M_H – масштабный эффект вертикального раскрытия по гужу, M_Y – масштабный эффект горизонта хода трала по верхней подборе.

Необходимо отметить, что масштаб гидродинамических коэффициентов сопротивления траловой оболочки C_k для первых четырех физических моделей ($1,49 \leq C_{F_0} \leq 2,1$) равен 3,76, а для двух последних ($8,1 \leq C_{F_0} \leq 18,7$) соответственно 0,91. Это доказывает, что значение средневзвешенной относительной площади траловой оболочки F_0 в большей степени влияет на величину фактического средневзвешенного угла атаки меридиана канатно-сетной части трала α_f . Доверительный интервал полученных результатов не превышает 10 %.

Литература

1. Белов В.А. (2000) Гидродинамика нитей, сетей и сетных орудий лова. - Калининград: КГТУ, 198 с.

О задаче определения пондеромоторных сил в трехмерном теле произвольной формы в квазистатическом электромагнитном поле

Жукова Екатерина Изосимовна

аспирант

Тулский Государственный Университет

e-mail: dop@tiei.ru, zzhuk@mail.ru

При решении ряда технических задач необходимо определить значение объемной механической силы, испытываемой проводником в квазистатическом электромагнитном поле.

Возникающая при этом математическая постановка задачи требует совместного решения уравнений механики и электромагнетизма при заданных граничных условиях.

В предлагаемом докладе в качестве метода решения выбран метод конечных элементов. Достоинством предложенного подхода является то, что одни и те же элементы используются и для решения задачи механики, и для задачи электромагнетизма, что существенно упрощает процедуру дискретизации пространства задачи.

Отличительной особенностью решения задачи электромагнетизма является использование скалярного электрического и векторного магнитного потенциала, что существенно усложняет вычислительную процедуру, но позволяет решать задачи со сложной пространственной геометрией.

В качестве примера рассматривается задача определения пондеромоторных сил по заданному закону изменения напряжения во времени в системе одновитковый индуктор – заготовка в трехмерном пространстве.

Литература

1. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М: Наука, 1976
2. П. Сильвестер, Р. Феррари. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986
3. Р. Галлагер. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984
4. О. Зенкевич. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975

Характеристика режимов работы роликвинтовых механизмов

Целищев Александр Сергеевич, Смольянинова Мария Владимировна

Владимирский Государственный Университет, г. Владимир, Россия

E-mail: Zelischev@mail.ru

Роликвинтовые механизмы (РВМ) используются в машиностроении и приборостроении для преобразования вращательного движения в поступательное. Они обладают высоким КПД, большой долговечностью, возможностью работать в гораздо более высоком скоростном диапазоне, чем передачи винт – гайка скольжения, что обусловлено наличием трения качения в резьбовых сопряжениях. По сравнению с шариковинтовыми передачами и передачами винт – гайка скольжения в роликвинтовых механизмах можно реализовать большой диапазон кинематических передаточных функций при фиксированном шаге резьбы, что очень важно в высоконагруженных исполнительных механизмах.

Согласно новой классификации представленной в работе [4], три класса РВМ класс Р-Г, класс Р-В и класс Р могут работать как в режиме с опорной гайкой, так и в режиме с опорным винтом. Один и тот же роликвинтовой механизм, относящийся к классу Р-Г, будет иметь различные кинематические передаточные функции в зависимости от того в каком режиме он работает. Это справедливо для всех 16 групп РВМ класса Р-Г. То же самое справедливо для всех групп РВМ класса Р-В.

Режим работы с опорной гайкой роликвинтового механизма наблюдается при выполнении следующих условий:

- гайка совершает вращательное движение в торцевой плоскости;
- гайка не совершает поступательного движения в осевой плоскости;
- ролики совершают планетарное движение в торцевой плоскости;

- ролики могут совершать поступательное движение в осевой плоскости, если это РВМ класса Р, либо не совершать поступательного движения, если это РВМ класса Р-Г или класса Р-В;
- винт совершает поступательное движение в осевой плоскости;
- винт не совершает вращательного движения в торцевой плоскости.

Если нарушается одно из этих условий, то режим работы роликовинтового механизма не соответствует опорной гайке. На (рис. 1.) изображен роликовинтовой механизм класса Р-Г группы 13 работающий в режиме опорной гайки, где ω_G – угловая скорость вращения гайки;

S_x – кинематическая передаточная функция (мм/об).

Режим работы с опорным винтом роликовинтового механизма наблюдается при выполнении следующих условий:

- винт совершает вращательное движение в торцевой плоскости;
- винт не совершает поступательного движения в осевой плоскости;
- ролики совершают планетарное движение в торцевой плоскости;
- ролики могут совершать поступательное движение в осевой плоскости, если это РВМ класса Р, либо не совершать поступательного движения, если это РВМ класса Р-Г или класса Р-В;
- гайка совершает поступательное движение в осевом направлении;
- гайка не совершает вращательного движения в торцевой плоскости.

Если нарушается одно из этих условий, то режим работы роликовинтового механизма не соответствует опорному винту.

В процессе работы поворот поступательно движущегося элемента в РВМ не допустим.

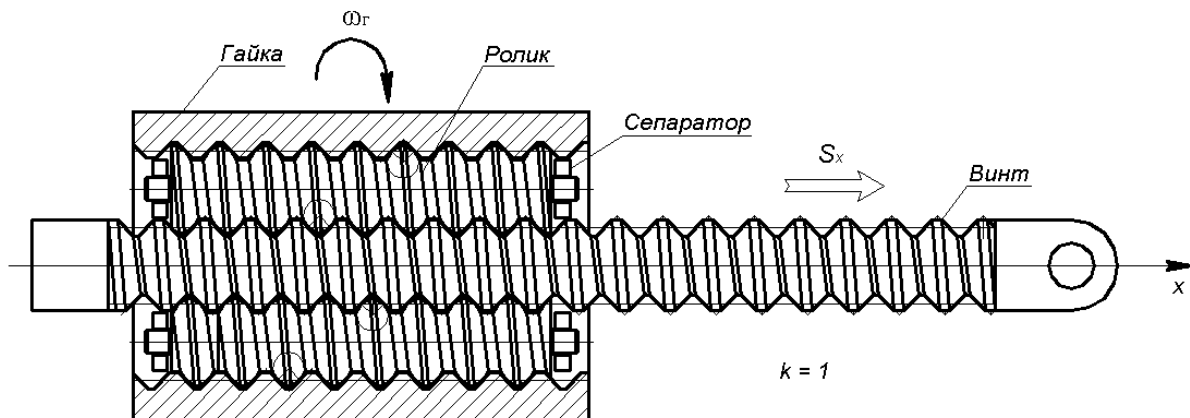


Рис. 1.

Существует еще один режим работы РВМ:

- винт закрепляется неподвижно;
- гайка совершает вращательно-поступательное движение относительно винта;
- ролики совершают планетарное движение в торцевой плоскости;
- ролики совершают поступательное движение в осевом направлении. Если это РВМ класса Р, то скорость их поступательного движения отлична от скорости поступательного движения гайки. Если это РВМ класса Р-Г или класса Р-В, то скорость их поступательного движения равна скорости поступательного движения гайки и совпадает по направлению.

Обычно такой режим используется при проведении экспериментов с винтовыми, шариковинтовыми и роликовинтовыми механизмами на измерительных установках. С точки зрения кинематики для РВМ класса Р-Г этот режим работы соответствует режиму

с опорной гайкой, КПФ в таком режиме работы у РВМ класса Р-Г точно такое же, как в режиме с опорной гайкой.

Таким образом, любой роликвинтовой механизм, принадлежащий той или иной группе, класса Р-Г или класса Р-В, характеризуется двумя кинематическими передаточными функциями, которые соответствуют либо режиму работы с опорным винтом, либо с опорной гайкой. Это является главной отличительной особенностью роликвинтовых механизмов от шариковинтовых передач и передач винт – гайка скольжения.

Для удобства рассмотрения роликвинтовых механизмов примем следующее условие. В РВМ класса Р-Г режим работы с опорной гайкой будем называть «основным», так как там при определении кинематической передаточной функции (КПФ) участвуют два параметра [2, 3]: параметр, характеризующий количественную часть окружности поступательно движущегося элемента и параметр, характеризующий сочетание углов подъема резьбы, а режим работы с опорным винтом будем называть «не основным», так как там при определении КПФ фигурирует всего один параметр характеризующий сочетание углов подъема резьбы.

В РВМ класса Р-В, наоборот, режим с опорным винтом будем называть «основным» так как там при определении КПФ участвуют два параметра [2, 3]: параметр, характеризующий количественную часть окружности поступательно движущегося элемента и параметр, характеризующий сочетание углов подъема резьбы, а режим работы с опорной гайкой будем называть «не основным», так как там при определении КПФ фигурирует всего один параметр характеризующий сочетание углов подъема резьбы.

Данная градация режимов работы роликвинтовых механизмов является чисто субъективной, так как для РВМ класса Р-Г и РВМ класса Р-В в одинаковой степени справедлив тот и другой режим работы.

Литература.

1. Морозов В.В. Панюхин В.И., Панюхин В.В. Зубчато-винтовые передачи для преобразования вращательного движения в поступательное / Под. ред. В.В. Морозова; Владим. гос. ун-т. Владимир, 2000. 160 с.
2. Целищев А.С. Новая методика определения кинематической передаточной функции в роликвинтовых механизмах с опорной кольцевой гайкой и кольцевыми нарезками на роликах. / Сб. статей заочн. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы науки в России», выпуск 3. – Кузнецк, 2005. – С. 211 - 214.
3. Смольянинова М.В, Целищев А.С. Особенность построения системы управления в станках с параллельной кинематикой. // Сб. статей I всерос. науч. конф. студен. и аспиран. «Робототехника, мехатроника и интеллектуальные системы», Таганрог, 2005 – С. 39 – 42.
4. Целищев А.С. Построение новой классификации роликвинтовых механизмов. // Материалы XIV всерос. науч.-техн. конф. «Проблемы повышения боевой готовности, боевого применения, технической эксплуатации и обеспечения безопасности полётов летательных аппаратов», Иркутск, 2005 – С. 276 – 277.

Исследование стационарных движений подвешенного на стержне твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью

Сумин Тарас Сергеевич

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: sumin@imec.msu.ru

Рассматривается задача о движении динамически симметричного тела-оболочки с эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью. Тело подвешено на жестком нерастяжимом стержне к неподвижной точке.

С использованием феноменологической модели (впервые была предложена коллективом Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова в 1988 г. и отражена в работах [1-2]) внутреннего вязкого трения наполнителя о стенки оболочки, составлены уравнения движения динамической системы. Исследование устойчивости стационарных движений проводится с помощью модифицированной теории Рауса.

Для тривиальных стационарных движений (ось динамической симметрии и ось стержня совпадают с вертикалью) определено, что степень неустойчивости может быть равна только 0, 2 или 4. Найдены условия, при которых реализуются данные значения степени неустойчивости.

Для нетривиальных стационарных движений показано, что при любом стационарном движении прямая, содержащая стержень, ось симметрии тела и вертикаль лежат в одной плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (№№ 04-01-00398 и 05-08-01378).

Литература.

1. Досаев М.З., Самсонов В.А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем. //ПММ. Т.66. Вып.3. 2002. С.427-433.
2. Карапетян А.В., Самсонов В.А., Сумин Т.С. Об устойчивости и ветвлении перманентных вращений твердого тела с жидким наполнением. //ПММ. Т. 68. Вып. 6. 2004, с. 994-998.

К вопросу о моделировании взаимодействия тела с потоком в случае угловых колебаний тела

Селюцкий Юрий Дмитриевич

научный сотрудник

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: seliutski@imec.msu.ru

В работах [1-2] была предложена феноменологическая модель нестационарного взаимодействия тела с формой, близкой к плоской пластине, совершающего поступательное движение в направлении «поперек» потока среды. В рамках этой модели для описания внутренней динамики потока вводится дополнительная обобщенная координата.

В настоящей работе данный подход модифицирован и распространен на случай угловых колебаний тела в потоке.

Произведен расчет зависимости от времени нормальной силы, действующей на крыло, совершающее гармонические угловые колебания, и проведено сопоставление результатов расчета с известными экспериментальными данными. Предложен набор значений параметров модели, обеспечивающий удовлетворительное согласие с экспериментами.

Рассмотрен случай «медленных движений» тела. Оказалось, что движение присоединенной динамической системы является быстрым и отделяется. Проведено сопоставление с результатами, получаемыми в рамках квазистатического подхода. Получено представление нормальной силы в форме, аналогичной часто используемой в прикладной аэродинамике форме с использованием так называемых вращательных производных.

Литература

1. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды. // Изв. РАН. МТТ, 2004, №4, с. 25-32.
2. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Феноменологическая модель взаимодействия пластины с потоком среды. // Фунд. и прикл. мат., 2005. Том 11, №7, с. 43-62.

Термоупругие напряжения в двухслойном цилиндре.

Прокопенко Ю.А.¹, Рыбинская А.А.², Савочка П.А.³

¹студент, ²ассистент, ³аспирант

Таганрогский государственный педагогический институт.

E-mail: zhornik@land.ru

При нанесении защитных покрытий (наплавкой, припеканием) на рабочие поверхности деталей машины в них возникают большие температурные градиенты. Эти градиенты вызывают температурные напряжения, которые могут вызвать разрушение изделия или отслаивание покрытия от основы.

В качестве модели для расчета температурных напряжений в работе был использован сплошной круговой цилиндр неограниченной длины, на цилиндрическую поверхность которого наносится при высокой температуре тонкий слой покрытия из другого материала. Далее эта система охлаждается. При этом возникают температурные напряжения, связанные с градиентом температур в каждом из цилиндров, а также за счет различия термомеханических постоянных. Предполагается, что реализуется случай обобщенной плоской деформации, материалы являются термоупругими, все термоупругие постоянные не зависят от температуры, однородны и изотропны.

В первой части работы решается задача теплопроводности для системы сплошной круговой цилиндр – покрытие с использованием граничных условий четвертого рода на контакте и с теплообменом на свободной от нагрузок поверхности покрытия.

Полученное точное решение уравнения теплопроводности оказалось весьма громоздким, что затруднило его применение для практических расчетов. В связи с этим в работе предложено вместо уравнения теплопроводности покрытия использовать нестандартное граничное условие на цилиндрической поверхности сплошного цилиндра [1,2]. Это условие учитывает теплопроводные и теплоемкие свойства покрытия и значительно упрощает решение задачи теплопроводности для сплошного цилиндра.

В работе проводится сравнение приближенного решения уравнения теплопроводности для цилиндра с точным решением.

Во второй части решения получен расчет термоупругих напряжений в системе цилиндр – покрытие с учетом того, что термоупругие поля в цилиндре и покрытии зависят от радиуса и времени, а поверхность покрытия свободна от нагрузок. При этом учтено, что на контакте цилиндра и покрытия реализуются два крайних случая

соединения, а именно спай (полное сцепление поверхности цилиндра и покрытия) и идеальное проскальзывание этих поверхностей (соединение с натягом).

Решение для термоупругих напряжений получено в двух видах, удобных для расчета при малых и больших временах. Проведен численный расчет всех напряжений. Показано, что радиальные напряжения относительно малы по сравнению с окружными и осевыми напряжениями, но при малой адгезионной прочности в случаях, когда они растягивающие, могут вызвать отслаивание покрытия от основы.

Литература

1. Жорник А.И. Об одной нестационарной задаче термоупругости для заключенного в тонкую оболочку сплошного неограниченного цилиндра с дискообразной трещиной.// Прикладная механика. 1993, т.29, №1, с.55-60.
2. Zhornik A.I. Nonsteady problem of the theory of elasticity for a solid infinite cylinder with a penny-shaped crack, enclosed in a thin shell.// Inter.Appl.Mech. 1993, July, pp.47-52.

Равномерная коррозия поллой сферы

под действием постоянного давления

Дворядкина Марина Вадимовна

студент

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: July@www.spectec.ru

Под действием окружающей среды может происходить самопроизвольное разрушение материалов, сопровождающееся изменением их механических характеристик – коррозия. В настоящей работе исследована общая коррозия сферической оболочки под действием постоянного внутреннего и внешнего давления агрессивных сред (задача Ламе о поллой сфере). При этом использована линейная зависимость скоростей v коррозии с наружной и внутренней стороны от максимальных нормальных напряжений σ_1 :

$$v = (a + m\sigma_1) \exp(-bt) \quad \text{при } \sigma_1 > \sigma_f.$$

Здесь a , m , b - экспериментально определяемые константы, зависящие от свойств материала и среды, σ_f - пороговое напряжение, t - время.

В работе [1] выведено дифференциальное уравнение изменения напряжений во времени, найдено его точное аналитическое решение для случая внутреннего давления коррозионной среды, произведена оценка долговечности сферы при хрупком разрушении.

Далее получено общее решение задачи в рамках линейной теории, как для случая, когда начальные напряжения больше пороговых значений, так и для случая, когда они не превосходят их. Выведены формулы для определения толщины стенок поллой сферы в любой момент времени.

Для трубы из идеального упругопластического материала Прандтля [2] определены условия перехода в состояние неограниченного течения.

Как известно, с течением времени, особенно под влиянием агрессивных сред, механические характеристики металлов меняются. Для учета этих изменений при оценке долговечности введены специальные функции состояний.

Результаты вычислений представлены в виде графиков. Из расчетов следует, что при относительно высоких показателях b затухания коррозии долговечность во многом зависит от изменения механических характеристик материала во времени.

Литература:

1. Дворядкина М.В., Пронина Ю.Г. Задача о толстостенной трубе, находящейся под давлением коррозионных сред // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. Вып. 9. СПб.: СПбГУ.2005. С. 245-259.
2. Айбиндер А.Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. М., 1991. 287 с.

Волновые пакеты в упругой пластинке со свободным краем

Гладков Павел Александрович

аспирант

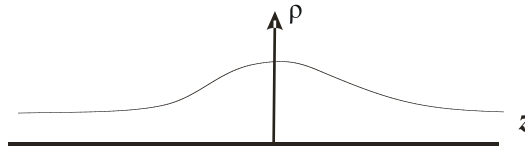
Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь

E-mail: Pavel.Gladkov@mail.ru

В работе (1) рассмотрена задача о колебании изотропной пластинки переменной толщины со свободным краем. Построено асимптотическое решение, позволяющее определить собственные частоты колебаний, локализованных около определенного поперечного сечения пластинки.

В настоящей работе при помощи метода (2) строится асимптотическое решение указанной задачи в форме так называемых волновых пакетов, позволяющее проследить динамику распространения волн в зависимости от начальных условий задачи.

Рассмотрим пластинку с зажатой границей $\rho = 0$ и свободной границей $\rho = f(z)$.



В нулевом приближении имеем задачу на собственное значение с однородными граничными условиями второго порядка для уравнения

$$\frac{K^2(1-\nu)}{2(\eta - Kp^2)} \frac{\partial^4 u_0}{\partial \rho^4} + \left[\frac{2\nu p^2 K^2 + \eta(1-\nu)K}{2(\eta - Kp^2)} + K \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial \rho^2} + \lambda u_0 = 0, \quad [1]$$

$$\eta = \gamma h(\omega - \dot{q}p)^2, \quad \lambda = \eta - Kp^2(1-\nu)/2,$$

где u_0 – поперечное смещение (уравнение для продольного смещения имеет аналогичный вид), ν – коэффициент Пуассона, K – константа, определяющая свойства материала, $p = p(t)$ – волновое число, $q = q(t)$ – продольная координата центра волнового пакета, ω – частота колебаний, h – толщина пластинки.

Из [1] определяется частота $\omega = \dot{q}p - H^\pm(p, q) = \dot{q}p \pm \sqrt{\frac{Kp^2(1-\nu) + 2\lambda_n}{2\gamma h}}$.

В первом приближении имеем систему Гамильтона

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q. \quad [2]$$

Следует заметить, что в частном случае, при $p(t) \equiv 0$, мы приходим к задаче (1).

Неожиданные результаты дает численное интегрирование [2]: вне зависимости от формы свободной границы пластинки выполняется соотношение $q(t) = c_0 t$, то есть волновой пакет движется равномерно. При этом волновое число $p(t) \equiv p_0$.

Следует отметить отсутствие эффекта отражения волнового пакета, найденного в (2) для волновода с закрепленной границей. На основании полученных численных результатов выдвинута гипотеза о соответствующем влиянии свободной границы на характер движения волнового пакета.

Литература

1. Kaplunov, J.D., Rogerson, G.A., Tovstik, P.E. (2005) Localized vibration in elastic structures with slowly varying thickness // Q J Mechanics Appl Math., 58, p. 645-664
2. Mikhasev, G.I. (2003) Traveling wave packets in a non-homogeneous narrow medium bounded by a surface of revolution, Wave Motion, 37, p. 207–217

Приближенные решения одномерных краевых задач ударного деформирования в нелинейно-упругих средах³¹

Герасименко Екатерина Андреевна

младший научный сотрудник

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

E-mail: ekaterina_gerasi@mail.ru

В настоящем сообщении рассматриваются приближенные аналитические решения ряда одномерных краевых задач, включающих цилиндрические или сферические поверхности разрывов градиента перемещений (ударные волны). Для таких волновых процессов определены возможные типы и скорости ударных волн. Показано, что на скорости распространения ударных волн влияют как интенсивность разрыва, так и характер предварительных деформаций в среде. По своему типу волны разделяются на квазипродольную волну и две квазипоперечных: на каждой из волн присутствует продольная и поперечная составляющая разрыва, причем одна из них является доминирующей, а вторая имеет относительно нее более высокий порядок малости.

Описание таких волновых процессов удобно проводить в пространственной криволинейной системе координат. В связи с этим возникает необходимость представления геометрических и кинематических условий совместности разрывов производных, а также рекуррентных соотношений для разрывов производных произвольного порядка в произвольной криволинейной системе координат. Основы теории движения поверхностей разрывов развиты в работах Адамара, Томаса, Быковцева, однако все изложение здесь проводится в декартовой системе координат.

Полученные рекуррентные соотношения [1] необходимы при построении приближенных решений краевых задач лучевым методом, в том случае, когда движение изначально изучается в криволинейной системе координат. В настоящем сообщении рассматриваются решения следующих задач: нормальный удар по внутренней поверхности цилиндрического или сферического отверстия в пространстве; об антиплоской или скручивающей деформации в несжимаемой среде. Искомое решение имеет форму типа ряда Тейлора за подвижной поверхностью разрывов. Разложение может проводиться по временной или пространственной координате, причем в качестве последней выбирается расстояние, отсчитываемое от поверхности разрывов до данной

³¹ Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-890.2003.1).

точки пространства по соответствующей этой точке лучу. Эта методика обычно применяется для решения задач со слабыми волнами, однако в 80-х гг. прошлого века А.А. Бурениным была предложена модификация метода, позволяющая применить его к процессам ударного деформирования.

Литература

1. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. (2004) Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный мат. сборник. Т. 5. N 1. С. 100-109.

Численное решение упругопластической задачи кручения-растяжения тел вращения при больших деформациях

*Павленкова Елена Владимировна*³²

научный сотрудник

НИИ механики Нижегородского государственного университета

им. Н.И.Лобачевского, Н.Новгород, Россия

E-mail: pavlyonkova@dk.mech.unn.ru

Разработана и программно реализована в рамках ППП «Динамика-2» достаточно общая методика численного решения задач о больших деформациях упругопластических тел вращения с сохранением осевой симметрии. Движение тел описывается общим уравнением динамики, следующим из принципа возможных перемещений в форме Журдена в цилиндрической системе эйлеровых координат. Полагается, что угол закручивания по окружной координате зависит от радиальной и осевой координат и не зависит от окружной. Поворот частиц среды как жесткого целого учитывается производной Яуманна. Учет упругопластических свойств материала осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением. Определяющая система уравнений решается методом конечного элемента в сочетании с явной схемой интегрирования во времени типа «крест». Для задач кручения разработана и реализована экспериментально-численная методика построения диаграмм деформирования при неоднородном НДС. Для ускорения вычислительного процесса используется экстраполяция по определенной на предыдущих шагах диаграмме деформирования, что позволяет корректировать ее не на каждом временном шаге, а только при отклонении найденного крутящего момента от экспериментального на заданную величину. В итоге однократного прямого численного расчета получаем диаграмму деформирования материала, соответствующую экспериментальной зависимости внешнего момента от угла закручивания. Приводятся экспериментальные данные и результаты решения задачи о кручении стержня переменной толщины из материала 12Х18Н10Т до деформаций разрушения. Получено хорошее соответствие результатов расчета и экспериментов при растяжении и кручении, что свидетельствует о слабой зависимости диаграммы деформирования стали 12Х18Н10Т от вида напряженного состояния при больших деформациях. Отметим, что при кручении не наблюдается образование “шейки” (как при растяжении), и однородность НДС сохраняется вплоть до разрушения, что позволяет построить диаграмму деформирования до деформаций, вдвое больших, чем при растяжении. Проведено сопоставление

³² Автор выражает признательность профессору, д.ф.м.н. Баженову В.Г. и к.т.н. Зефинову С.В. за помощь в подготовке тезисов

численных и экспериментальных исследований процессов деформирования сплошных осесимметричных образцов переменной толщины при комбинированном нагружении кручением-растяжением до момента разрушения. Выявлены основные закономерности процессов деформирования и предельных состояний сплошных осесимметричных образцов при пропорциональном кинематическом нагружении; разработан набор параметров и интегральных характеристик для анализа сложного НДС с учетом больших деформаций и неоднородности в процессе деформирования.

Численное исследование прямого инициирования детонации в реальной газовой смеси

Зубкова Людмила Александровна

аспирантка

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: Lumilli@mail.ru

В авиации, энергетике, космической промышленности и других областях большой интерес представляет исследование условий инициирования детонации в газовых смесях. Осуществление физического эксперимента при этом обычно проблематично и дорогостояще, поэтому важны численные исследования по этой тематике.

Мы рассматриваем химически реагирующую смесь совершенных газов, содержащую водород, азот и кислород. Считаем, что нет притоков тепла извне и пренебрегаем явлениями переноса и массовыми силами. Рассматривается одномерное течение газа. Термодинамические параметры газов, входящих в реагирующую смесь, вычисляются с помощью базы данных формата CHEMKIN-II. Кинетический механизм смеси описывается набором из девятнадцати обратимых элементарных реакций. Задача решается в сферически симметричном и плоском случаях. Начальные условия ставятся следующим образом: скорость газовой смеси в начальный момент задается равной нулю вблизи центра симметрии, либо жесткой стенки (в плоском случае), моделируется мгновенный нагрев газа посредством выделения энергии E_0 в окрестности радиусом R_0 . При решении задачи используется явный конечно-разностный метод семейства TVD с неподвижной сеткой. Расчет на каждом шаге по времени состоит из двух этапов: а) расчет химических процессов в газе, без учета его движения; б) расчет динамики газовой смеси, без учета химических взаимодействий.

Решение поставленной задачи позволило получить следующие результаты исследования:

- Проведено сравнение профилей волны плоской и сферической детонации. Получено отличие формы профилей давления и близость профилей температуры.
- Проведено исследование условий прямого инициирования сферической детонации в области параметров $(\Delta E, R_0)$, где ΔE – дополнительная энергия, внесённая в момент времени $t = 0$ в единицу объёма, R_0 – радиус, ограничивающий этот объём. Получено изображение области прямого инициирования детонации в этой плоскости параметров в интервале изменения $\Delta E \in [0, 4]$ Дж/см³, $R_0 \in [0.1, 4]$ см.

Литература

1. Г. Г. Черный, Газовая динамика. Одномерное неустановившееся движение, МГУ, 1983.

2. A. Harten, High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. J. Comput. Phys., 49 (1983), p. 357-393.
3. P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and differential schemes. . Comput. Phys., 43 (1981), p. 357-372.
4. P. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984), p. 995-1010.
5. Д. Андерсон, Дж. Танненхилл, Р. Плетчер. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. т. 1-2. Москва, «Мир», 1990.
6. Л. И. Седов. Механика сплошной среды, 1-2 том, издательство «Наука», Москва, 1976